

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik



Diplomarbeit

Approximation von Krümmungsinformation
für die
medizinische Visualisierung

Christian Schulz

Institut für Simulation und Graphik

**Approximation von Krümmungsinformation
für die
medizinische Visualisierung**

Diplomarbeit

an der
Fakultät für Informatik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von:	CHRISTIAN SCHULZ
geb. am:	30. Juli 1977
in:	Ilmenau
Matrikelnummer:	15 42 66
1. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. BERNHARD PREIM
2. Gutachter:	Prof. Dr. STEFAN SCHIRRA
Betreuer:	Prof. Dr.-Ing. BERNHARD PREIM Dipl.-Ing. CHRISTIAN TIETJEN
Zeit der Diplomarbeit:	27.4.2005 - 27.10.2005

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Christian Schulz (Matrikel-Nr. 154266), die vorliegende Arbeit allein und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt zu haben.

Magdeburg, den 22. Dezember 2005

Christian Schulz

Danksagung

Das Zustandekommen dieser Arbeit sowie die Finanzierung der langen Vorbereitungszeit wären ohne die ausdauernde Unterstützung meiner Großmutter, Gertrud Knapp, und meiner Eltern, Silvia und Heinz-Joachim Schulz, nicht möglich gewesen. Danke, dass Ihr durchgehalten habt.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Betreuern Prof.Dr.-Ing. Bernhard Preim und Dipl.-Ing. Christian Tietjen für die fachlichen Ratschläge und die regelmäßige Motivation bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Mathematik - Krümmungsberechnung	5
2.1.1 Parameterdarstellung	11
2.1.2 Implizite Funktionen	12
2.2 Eigenschaften von Daten zur Geometriebeschreibung	13
2.3 Krümmungsberechnung auf Oberflächenmodellen	14
2.3.1 Surface Fitting	15
2.3.2 Curve Fitting	21
2.4 Krümmungsberechnung in Volumendaten	24
2.5 Anwendung von Krümmungsinformation	27
2.5.1 Darstellung	28
2.5.2 Modellierung und Analyse	35
3 Bewertung approximierter Krümmungsinformation	37
3.1 Verfahrensabhängige Eigenschaften	37
3.1.1 Eigenschaften der Krümmungsapproximation auf Oberflächen	39
3.1.2 Eigenschaften der Krümmungsapproximation innerhalb von Volumendaten	42
3.2 Ergebnisabhängige Eigenschaften	43
3.2.1 Skalare Krümmungswerte	43
3.2.2 Vektorielle Krümmungswerte	46
3.2.3 Vergleich von Bildern	48
3.3 Techniken zum Vergleich ergebnisabhängiger und verfahrensabhän- giger Eigenschaften	49
3.3.1 Histogramm und Farbverläufe	49
3.3.2 Skalare Krümmungsinformation	49
3.3.3 Vektorielle Krümmungsinformation	51
3.3.4 Konzept	51
4 Implementierung	53

4.1	MevisLab	53
4.2	Bibliotheken	54
4.2.1	MLWEM und ML	54
4.2.2	SoWEM	55
4.2.3	CLAPACK	56
4.2.4	L-BFGS-B	56
4.3	Entwickelte Module	56
4.4	Entwickelte Datenstrukturen	59
5	Ergebnisse	63
5.1	Einsetzbare Techniken	63
5.1.1	Untersuchung von lokalen Eigenschaften	63
5.1.2	Untersuchung globaler Eigenschaften	68
5.2	Auswertung der durchgeführten Untersuchungen	72
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
6.1	Fazit	81
6.2	Ausblick	82
A	Bilder	85
	Literaturverzeichnis	87

Abbildungsverzeichnis

2.1	Krümmung und Krümmungskreis	6
2.2	Flächenkurve	7
2.3	Punktumgebungen	9
2.4	Gaußabbildung	9
2.5	geodätische Polarkoordinaten	10
2.6	Nachbarschaften	16
2.7	approximierter Krümmungskreis	22
2.8	approximierte Punktumgebungen	24
2.9	Würfel und Torus	30
2.10	Transferfunktion	31
2.11	Merkmalslinien und Einfärben	31
2.12	Merkmalslinien in Volumendaten	32
2.13	Merkmalslinien [RÖSSL et al., 2000a]	32
2.14	Schraffur [RÖSSL et al., 2000b]	33
2.15	Schraffur	33
2.16	Optimierungsproblem [HERTZMANN und ZORIN, 2000]	35
2.17	Rekonstruktion	36
2.18	Glättung [DESBRUN et al., 1999]	36
3.1	Manigfaltigkeiten	40
3.2	Lagrange Polynomial	44
3.3	zylindrische Umgebung	46
3.4	Geodätische Linie	48
3.5	Histogrambereiche	50
3.6	Konzept	52
4.1	Degenrierte Elemente	55
4.2	Netzwerk	58
4.3	Klassen	59
4.4	Algorithmus	61
5.1	zylindrische Punkte auf einem Schädelmodell	64
5.2	Verteilung von Krümmungswerten	65
5.3	Gradient für maximale absolute Krümmung	65
5.4	Orientierungsfelder	67

5.5	verschiedene Oberflächenbeschreibung eines Muskels	68
5.6	2D Histogramm	69
5.7	zylindrische Punkte auf einem Muskelmodell	70
5.8	Gefäßbaum und Histogramme	71
5.9	nicht-2-manigfaltige Umgebung	73
5.10	Ergebnisse des CubicOP	74
5.11	Ergebnisse des QuadraticOP	75
5.12	unterbestimmte Passflächen	77
5.13	nichtprojektive Umgebung	78
A.1	Schädelmodell mit Hauptkrümmungsrichtungen	85
A.2	Schädelmodell mit geglättetem Richtungsfeld	86

1 Einleitung

Ziel einer Visualisierung von Daten ist die korrekte Beschreibung bzw. Wiedergabe der für die jeweilige Untersuchung relevanten Information aus den Daten. So entscheidet neben der Güte der Informationsextraktion auch die Art der Abbildung dieser Information über die Möglichkeit, korrekte Aussagen über die dargestellten Daten zu treffen. Die Technik zur bildhaften Beschreibung einer oder mehrerer Eigenschaften von Daten ist also dem jeweiligen Visualisierungsziel und Charakter der zu zeigenden Information anzupassen.

In der Medizin werden Daten zur Beschreibung von Eigenschaften körperinnerer Strukturen erzeugt. Unter anderem ist mit Hilfe von CT-Aufnahmen die Rekonstruktion von Oberflächen dieser Strukturen möglich. Die lokale Krümmungsinformation kann bei der Analyse dieser Daten in vielen Bereichen hilfreich sein. So ist das Ziel einer Visualisierung dieser Oberflächendaten die Untersuchung von Größe und Form sowie Lokalisierung und räumliche Anordnung der erfassten Objekte. Bei der Darstellung der Oberflächen von anatomischen Strukturen kann zwischen einem realistischen und illustrativen Stil unterschieden werden. Bei dem Versuch, die Daten möglichst realistisch zu präsentieren, gilt es, ein möglichst detailgenaues, d.h. natürliches Abbild der jeweiligen Eigenschaften dieser Strukturen zu erzeugen. Die Visualisierung dieser Daten ist aber auch durch die Anwendung illustrativer Abbildungstechniken möglich. So hat sich bei der Abbildung von Organen in medizinischen Atlanten deren Beschreibung durch illustrative Darstellungstechniken bewährt. Diese Abbildungen sind unter anderem gekennzeichnet durch nichtrealistische Einfärbungen der Organe sowie Oberflächenbeschreibungen durch Liniengrafiken. Das Ziel einer automatisierten Generierung solcher illustrativer Darstellungen anhand von realen medizinischen Daten ist es, ähnlich expressive und effiziente Abbildungen von körperinneren Strukturen zu erzeugen. Zur Umsetzung illustrativer Darstellungstechniken für diskrete Oberflächenbeschreibungen ist unter anderem die Approximation von Krümmungsinformation auf diesen Modellen erforderlich [STROTHOTTE und SCHLECHTWEG, 2002; RÖSSL et al., 2000b; HERTZMANN und ZORIN, 2000].

Die Verwendung von Krümmungsgrößen kann aber auch zur Datenanalyse eingesetzt werden. Anhand von Krümmungsgrößen ist dann die Klassifikation von Oberflächen bzw. einzelnen Oberflächenbereichen bzgl. geometrischer Eigenschaften möglich. Diese Information ermöglicht ebenfalls die Anwendung von Verfahren zur anisotropen Glättung, d.h. Erhaltung krümmungsabhängiger Oberflächeneigen-

schaften bzw. den Einsatz von Methoden zur Identifikation verrauschter Oberflächenbereiche.

Die Approximation von Krümmungsinformation ist weiterhin auch zur Datenrekonstruktion bzw. Modellierung, d.h. zur Erzeugung von Oberflächen mit bestimmten Krümmungseigenschaften anwendbar [XU, 2004; WELCH und WITKIN, 1994].

Ziel der Arbeit ist es, ein Konzept vorzustellen, um die existierenden Verfahren (z.B. [TAUBIN, 1995; PAGE et al., 2002; GOLDFEATHER, 2001; BARR et al., 2002; KINDLMANN, 2003]) zur Approximation von Krümmungsinformation auf den gegebenen realen medizinischen Daten zu testen und zu vergleichen. Eine Motivation für eine solche Analyse verschiedener Methoden ist deren Einfluss auf das Ergebnis krümmungsabhängiger illustrativer Darstellungsstile. So soll anhand des vorgestellten Konzepts entscheidbar sein, ob und durch welche Approximationsmethoden etablierte illustrative Darstellungstechniken, zur Erzeugung expressiver und effektiver Darstellungen ähnlich den Abbildungen in medizinischen Atlanten möglich sind. Hierzu gehört auch die Empfehlung geeigneter Verfahren zur Krümmungsapproximation auf Oberflächenmodellen für bestimmte anatomische Strukturen.

Im 2.Kapitel der Arbeit werden die theoretischen Grundlagen der Krümmungsberechnungen auf differenzierbaren Geometrien kurz vorgestellt. Hierbei wird zwischen einer Berechnung von Krümmungsinformation auf parametrisierten und impliziten Oberflächenbeschreibungen unterschieden. Dieser Überblick der theoretischen Grundlagen der Krümmungsberechnung wird dann zur Beschreibung einiger bestehender Verfahren zur Krümmungsapproximation auf diskreten Oberflächenmodellen und innerhalb von Volumendaten genutzt. Danach werden mögliche Daten zur Oberflächenbeschreibung charakterisiert. Anschließend erfolgt eine Angabe einer Reihe von Anwendungsgebieten ermittelter Krümmungsinformation, wobei genauer auf illustrative Techniken eingegangen wird.

Im 3. Kapitel erfolgt die Untersuchung der charakteristischer Eigenschaften, die bei der Ermittlung von Krümmungsinformation auf nicht analytischen Geometrien zu beachten sind. Hierbei werden unterschiedliche Größen und Masstäbe vorgestellt, die zur Bewertung einer gegebenen Krümmungsinformation eingesetzt werden können. Dieser Teil der Arbeit endet mit der Angabe eines Konzepts. Anhand dieses Entwurfs können die zu bestimmenden Daten bei der Krümmungsberechnung klassifiziert werden. Weiterhin ist hierdurch auch die Charakterisierung von Eigenschaften möglich, d.h. es ist entscheidbar, auf welche Daten sich die zu untersuchende Eigenschaft bezieht.

Im 4. Kapitel der Arbeit werden die eingesetzten Werkzeuge und entwickelter Strukturen, zur Berechnung und Analyse von Krümmungsinformation, vorgestellt. Dieser Teil der Arbeit enthält Informationen über die genutzte Entwicklungsumgebung und die eingebundenen Bibliotheken. So sind die zu entwickelnden Schnittstellen für die umzusetzenden Verfahren anhand der Entwicklungsumgebung charakterisierbar. Für die eingesetzten bzw. eingebunden Bibliotheken wird näher auf die ge-

nutzte Funktionalität eingegangen. Danach werden die entwickelten Schnittstellen und deren Funktionsumfang vorgestellt. Abschließend erfolgt eine Übersicht über die implementierte Klassenstruktur.

Das 5. Kapitel dient zur Darstellung, der jetzt vorhandenen Möglichkeiten, eine Beurteilung von Krümmungsinformation durchführen zu können. Weiterhin enthält dieser Abschnitt noch Ergebnisse bereits durchgeführter Untersuchungen. Aufgrund dieser Untersuchungen werden dann Empfehlungen für zu verwendende Verfahren gegeben.

Abschließend werden die Ergebnisse nochmals zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden der Krümmungsapproximation und -analyse gegeben.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die Möglichkeiten gegeben, Krümmungsgrößen zu berechnen und anzuwenden.

Im ersten Abschnitt geht es um die formale Herleitung des Krümmungsbegriffs als differentielle mathematische Größe auf ableitbaren gekrümmten Flächen, d.h. auf kontinuierlichen Modellen. Ziel dieser Herleitung ist es, einerseits die notwendigen Größen zur Krümmungsberechnung einzuführen, aber auch die unterschiedlichen berechenbaren Krümmungsinformation vorzustellen und geometrisch zu deuten.

Bei der Beschreibung der Berechnungsmethoden erfolgt eine Trennung in Verfahren zur Krümmungsbestimmung auf kontinuierlichen Oberflächen und in Techniken für Oberflächen aus kontinuierlichen impliziten Funktionen. Eine solche Unterscheidung ist sinnvoll, da Techniken für kontinuierliche bzw. differenzierbare Oberflächen die theoretische Grundlage für Verfahren zur Krümmungsapproximation auf diskreten Oberflächenmodelle bilden. Basis für Verfahren zur Krümmungsbestimmung innerhalb von Volumendaten hingegen ist die Krümmungstheorie für implizite Funktionen.

Eine genauere Charakterisierung der auftretenden Daten, d.h. Datenursprung bzw. Generierung, sowie die auftretenden Gittertypen, ist Inhalt des folgenden Abschnitts. Anschließend wird ein Überblick über Verfahren zur Krümmungsapproximation auf Oberflächenmodellen und in Volumendaten gegeben.

Im letzten Abschnitt werden krümmungsbasierte Analyse bzw. Darstellungsverfahren vorgestellt. Da krümmungsbasierte Visualisierungstechniken vorwiegend im Bereich der nicht-photorealistischen Darstellung (NPR) eingesetzt werden, soll in diesem Abschnitt auch noch eine Motivation für den Einsatz illustrativer Darstellungsmethoden gegeben werden.

2.1 Mathematik - Krümmungsberechnung

Krümmungswerte dienen zur Beschreibung des lokalen Verhaltens eines geometrischen Objektes in der Umgebung eines Punktes P . So ermöglicht die Krümmungsberechnung quantitative Aussage über den geraden bzw. ebenen Verlauf von Kurven C bzw. Flächen F an einem Punkt P [SCHOENE, 1975]. Diese beiden Geometrietypen sollen folgendermaßen gegeben sein:

- C : Abbildung eines eindimensionalen Intervalls auf eine Menge von Punkten, nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. $|\dot{C}| = 1$
- F : Abbildung eines zweidimensionalen Intervalls auf eine Menge von Punkten

Krümmungsberechnungen setzen orientierbare Geometrien voraus, d.h. für die entsprechende Geometrie ist die Angabe eines differenzierbaren Einheitsnormalenvektorfeldes $N(P)$ notwendig. Durch $N(P)$ ist jedem Punkt P einer Kurve C bzw. Fläche F genau ein normierter Normalenvektor zugeordnet. Im Fall einer Kurve entspricht diese Normale der Hauptnormale $N_h = \dot{C} \times (\dot{C} \times \ddot{C})$ [SCHOENE, 1975]. Bei Flächen hingegen ist die Normalenrichtung in P durch die Orthogonalität zu den Tangentenrichtungen aller Flächenkurven im Punkt P gegeben. Die Tangentenrichtungen liegen in der Tangentialebene bzw. im Tangentialraum T_P .

Die Krümmungsberechnung für Flächen am Punkt P liefert Aussagen bzgl. der Krümmung von Flächenkurven in P . Aus diesem Grund werden Krümmungsgrößen zuerst genauer für Kurven und anschließend für Flächen vorgestellt. Für eine Kurve C ist die Krümmung κ an der Stelle P ein Maß für die Änderung der Tangentenrichtung \dot{C} entlang von N_h , d.h. $\ddot{C} = \kappa N_h$.

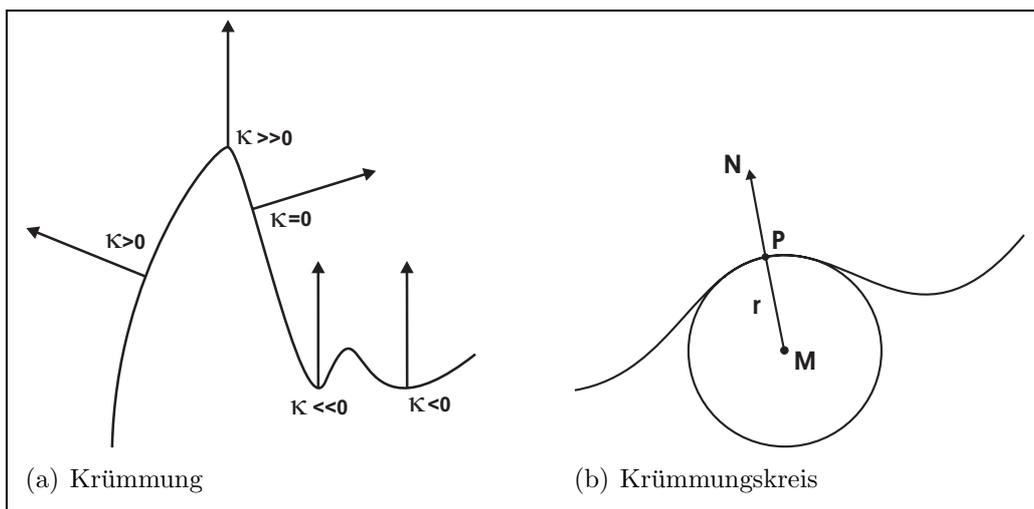


Abbildung 2.1: Krümmung entlang einer Kurve und Krümmungskreis

Weiterhin ist durch die Berechnung von κ die eindeutige Beschreibung eines Krümmungskreises möglich, der die Kurve C in P berührt. Dieser Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M ist gegeben durch:

$$r = \frac{1}{\kappa} \quad (2.1)$$

$$M = P + rN_h \quad (2.2)$$

Die Ebene, die den Krümmungskreis enthält, entspricht der Schmiegenebene, aufgespannt durch N_h und \dot{C} . Im Gegensatz zur Beschreibung des lokalen

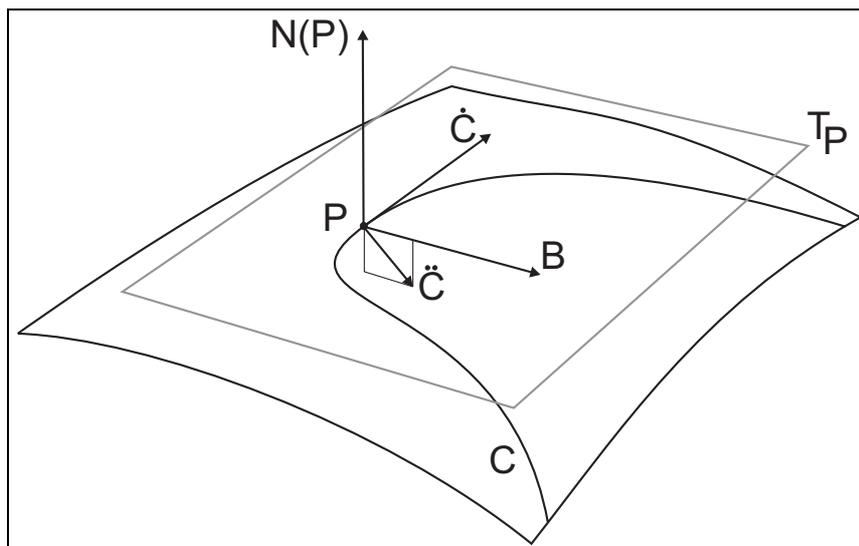


Abbildung 2.2: geometrische Deutung von Normalenkrümmung κ_N und geodätischer Krümmung κ_G einer Flächenkurve C im Punkt P , es gilt $\kappa^2 = |\ddot{C}|^2 = \kappa_N^2 + \kappa_G^2$ bzw. $\ddot{C} = \kappa_N N(P) + \kappa_G B$ wobei $B = \dot{C} \times N(P)$

Verhaltens von Kurven durch eine Krümmungsgröße kann das lokale Verhalten von Flächen durch mehrere unterschiedliche Krümmungsgrößen charakterisiert werden. In der Differentialgeometrie für Flächen sind folgende Krümmungsgrößen relevant:

- mittlere Krümmung: H
- Gauß'sche Krümmung: K
- Hauptkrümmungen: κ_1, κ_2
- Hauptkrümmungsrichtungen: $t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2}$

In welcher Form diese Größen für implizite Funktionen und parametrisierte Oberflächen berechnet werden können, wird in den Abschnitten (2.1.1) bzw. (2.1.2) beschrieben. Die Bestimmung dieser Krümmungswerte erlaubt unter anderem quantitative Aussagen zum Flächenverlauf bzgl. der Tangentialebene T_P . Weiterhin ist eine Klassifizierung von Punktumgebungen bzgl. der auftretenden Krümmungseigenschaften in die folgenden Kategorien *hyperbolisch*, *parabolisch* und *elliptisch*, möglich. Elliptische Umgebungen lassen sich weiterhin noch in kugelige und ebene Bereiche unterscheiden. Zur Bestimmung der relevanten Krümmungsgrößen (2.1) für eine Flächenpunkt P ist die Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Flächenkurven an P notwendig. Die Krümmung κ einer Flächenkurve ist durch zwei flächenabhängige Krümmungsgrößen, die Normalenkrümmung κ_N und die geodätische Krümmung κ_G , beschreibbar (Abb. 2.2). Die Normalenkrümmung κ_N entspricht somit einerseits der Tangentenänderung der Flächenkurve entlang der Flächennormale. Andererseits ist durch κ_N ebenfalls die Änderung des Einheitsnormalenvek-

torfeldes in die entsprechende Tangentenrichtung gegeben. Mit Hilfe der Weingartenabbildung W ist die Berechnung der Normalenkrümmung an einem Punkt P in eine Tangentenrichtung t möglich. Für eine orthonormale Basis von T_P hat die Weingartenabbildung W die Form einer symmetrischen 2×2 Matrix [DO CARMO, 1994]. Durch die Beschreibung der Tangentenrichtung t bzgl. dieser Basis durch \bar{t} ist die zugehörige Normalenkrümmung κ_N folgendermaßen berechenbar:

$$\kappa_n = \bar{t}^T W \bar{t} \quad (2.3)$$

Aus der quadratischen Form von (2.3) folgt die Existenz von höchstens zwei Extremalstellen. Die Extremwerte einer Gleichung in quadratischer Form entsprechen den Eigenwerten. Weiterhin treten diese Extremwerte entlang der zugehörigen Eigenvektoren auf. Die beiden maximalen Normalkrümmungen und zugehörigen Tangentenrichtungen entsprechen somit den Eigenwerten bzw. orthogonalen Eigenvektoren von W . Diese Größen werden als Hauptkrümmungen (κ_1, κ_2) bzw. Hauptkrümmungsrichtungen $(t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2})$ bezeichnet. Entlang von t_{κ_1} und t_{κ_2} treten also die maximalen Normalenkrümmung sowie die maximalen Änderungen im Einheitsnormalenvektorfeldes κ_1 und κ_2 auf. Im entarteten Fall existieren keine zwei unterschiedlichen Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von W , d.h. alle Tangentenrichtungen t sind Hauptkrümmungsrichtungen. Hierdurch sind ebene und kugelige Bereich gekennzeichnet. Mittlere H und Gauß'sche Krümmung K sind ebenfalls entweder direkt durch die Elemente von W oder anhand der Hauptkrümmungen bestimmbar:

$$H = \text{spur}(W) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (2.4)$$

$$K = \det(W) = \kappa_1 \kappa_2 \quad (2.5)$$

Anhand der Gauß'schen Krümmung lässt sich das lokale Verhalten der Fläche im Punkt P - wie in Abb. 2.3 gezeigt - charakterisieren: Neben der Berechnung von H und K durch (2.5) ist auch deren direkte Bestimmung für einen Punkt möglich. Hierzu ist die Beschreibung eines Umgebungsbereichs B von einem Flächenpunkt durch einen Radius r notwendig. Die Umgebungsbeschreibung durch einen maximal zulässigen Abstand r erfolgt bzgl. geodätischer Polarkoordinaten (Abb. 2.5). Durch eine solche Umgebungsbeschreibung ist dann mit Hilfe des sphärischen Bildes des Flächenbereichs B eine Bestimmung von K möglich. Das sphärische Bild liefert die Gaußabbildung (Abb. 2.4), $P \rightarrow N(P)$. Durch die Gaußabbildung wird jedem Flächenpunkt ein Punkt auf der Einheitskugel zugeordnet. Die Koordinaten dieses Kugelpunktes entsprechen denen der zugehörigen Normale im Punkt auf der Oberfläche. Durch die Gaußabbildung erfolgt also die Beschreibung einer Punktumgebung durch den Bereich auf einer Kugeloberfläche. Zur Berechnung der Gauß'schen Krümmung anhand der Gaußabbildung wird das Verhältnis zwischen Flächeninhalt $A(B)$ eines Flächenbereichs B und Flächeninhalt $A_G(B)$

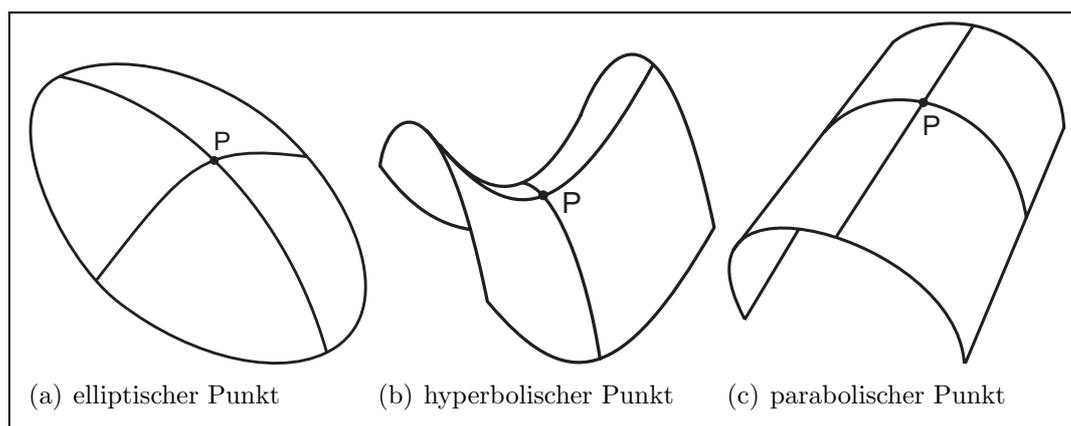


Abbildung 2.3: Punktumgebungen: $K > 0$ elliptischer Punkt, d.h. beide Hauptkrümmungen besitzen gleiches Vorzeichen, $K < 0$ hyperbolischer Punkt, d.h. neg. und pos. Hauptkrümmung, $K = 0$ parabolischer Punkt mind. eine Hauptkrümmung ist 0

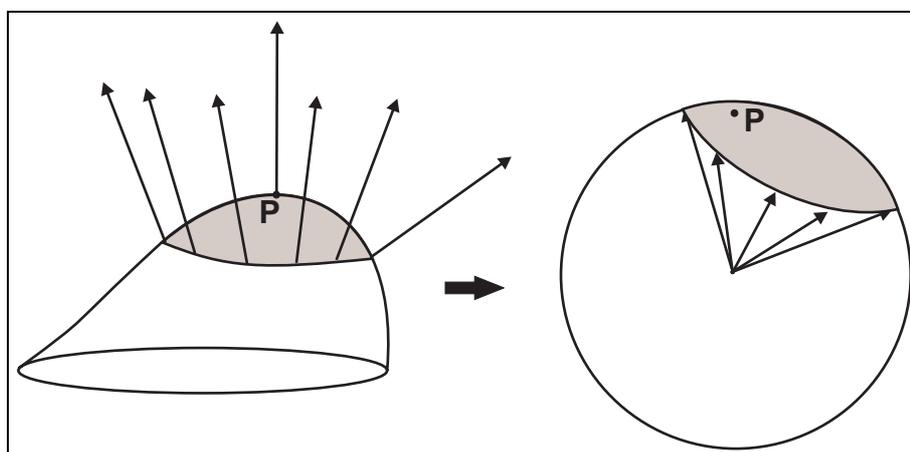


Abbildung 2.4: Gaußabbildung, Abbildung der Umgebung eines Flächenpunktes auf einen Bereiche auf einer Kugeloberfläche in Abhängigkeit von der Normalenänderung

des zugehörigen sphärischen Bereichs untersucht. Der Grenzwert dieses Quotienten, d.h. Verkleinerung des Bereichs B durch Verkleinerung von r , liefert:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_G(B)}{A(B)} \quad (2.6)$$

Die Veränderung des Flächeninhaltes $A(B)$ durch die Verschiebung des Punktes P kann zur Bestimmung der mittleren Krümmung eingesetzt werden. In [DO CARMO, 1994] wird gezeigt, dass für $r \rightarrow 0$ die maximale Änderung des Flächeninhaltes $A(B)$ einer Punktumgebung in Richtung der mittleren Krümmungsnormale Hn

auftritt. Daraus wird folgender Zusammenhang zwischen Hn und dem Gradienten der Änderung des Flächeninhalts, ∇A , gegeben:

$$Hn = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A} \quad (2.7)$$

Die Berechnung der Hauptkrümmungen anhand von H und K ist durch

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned} \quad (2.8)$$

möglich. Die geodätische Krümmung κ_G wird ebenfalls zur Charakterisierung von Flächenkurven eingesetzt. So gilt für eine Flächenkurve mit minimaler Länge, die P_1 und P_2 enthält, $\kappa_G = 0$ für den gesamten Kurvenverlauf zwischen P_1 und P_2 . Für geodätische Linien gilt also: $\kappa = \kappa_N$. Durch die Beschreibung der Umgebung von P durch geodätische Polarkoordinaten (Abb. 2.5) ist eine bijektive Abbildung von Punkten in T_P auf Flächenpunkte gegeben. Bei gegebener Basis von T_P bezeichnet

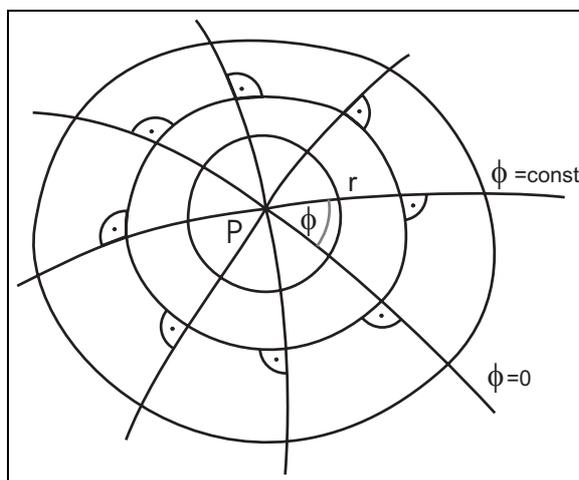


Abbildung 2.5: geodätische Polarkoordinaten für Umgebung an P (r, ϕ) - r geodätische Abstands-kreise, d.h. alle Punkte besitzen gleichen Anstand zu P , ϕ Winkel zu Achse einer Basis des Tangentialraumes T_P

ϕ den Winkel einer Tangentialrichtung t zu einem der Basisvektoren von T_P . r entspricht dem Abstand zwischen einem Flächenpunkt in Richtung ϕ und P . Die formalen differentialgeometrischen Methoden zur Krümmungsberechnung für parametrisierte und implizite Geometriebeschreibungen sollen in den folgenden beiden Abschnitten kurz vorgestellt werden. Für beide Geometriebeschreibungen werden die Methoden zur Berechnung der Elemente der Weingartenmatrix W beschrieben. Weiterhin werden die Möglichkeiten die Gauß'sche und mittlere Krümmung durch (2.6), (2.7) direkt zu bestimmen, für parametrisierte Modelle beschrieben.

2.1.1 Parameterdarstellung

Eine parametrisierte Fläche im \mathbf{R}^3 entspricht einer Abbildung $x : R \times R \rightarrow R^3$. Eine solche Geometrie kann wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Die u -Kurven für $v = \text{const}$ und v -Kurven für $u = \text{const}$ bilden auf der Fläche ein Kurvennetz. Schneiden sich in jedem Flächenpunkt genau zwei Kurven des u, v Netzes, ist jedem Flächenpunkt ein Koordinatenpaar (u, v) zugeordnet. Diese u, v Koordinaten eines Flächenpunktes werden auch als Gauß'sche Koordinaten bezeichnet. Das zur Fläche gehörende Einheitsnormalenvektorfeld N ist durch die Gauß'schen Koordinaten, d.h. (u, v) , folgendermaßen beschreibbar:

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \quad (2.10)$$

Die Elemente der Weingartenabbildung W lassen sich anhand der Größen der ersten I (E, F, G) und zweiten II (L, M, N) Fundamentalform [SCHOENE, 1975] ermitteln. Diese Größen sind definiert als:

$$\begin{aligned} E &= x_u x_u & F &= x_u x_v & G &= x_v x_v \\ L &= x_{uu} N & M &= x_{uv} N & N &= x_{vv} N \end{aligned} \quad (2.11)$$

Durch diese Werte ist W dann folgendermaßen beschreibbar:

$$W = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} MF - LG & LF - ME \\ NF - MG & MF - NE \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Im Fall orthonormaler Tangentialvektoren x_u und x_v ist die Matrix (2.12) symmetrisch. Durch die Beschreibung eines Tangentialvektors t bzgl. dieser Basis durch $t = ax_u + bx_v$ ist die Normalenkrümmung folgendermaßen bestimmbar:

$$\kappa_N = [a, b] W \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Aus den Fundamentalgrößen (2.11) sind weiterhin auch Eigenschaften der (u, v) Kurven bzgl. Skalierung und Schnittwinkel, auf der Fläche ableitbar. So gilt für ein orthogonales Netz $F = 0$. Ein Kurvennetz, das eine Fläche entlang der Hauptkrümmungsrichtungen durchsetzt, ist durch $F = 0$ und $M = 0$ gekennzeichnet [SCHOENE, 1975].

Vorraussetzung zur Bestimmung relevanter Krümmungswerte ist also eine zweimal ableitbare parametrisierte Flächenbeschreibung, da die zur Krümmungsberechnung

notwendigen Größen E, F, G, L, M, N partiell differenzieren 1. und 2. Ordnung erfordern.

2.1.2 Implizite Funktionen

Eine implizite Funktion ist gegeben durch eine Abbildung $F : R^3 \rightarrow R^0$, d.h. $F(x, y, z) = \text{const}$. Die Menge der Punkte, die die Gleichung $F(x, y, z) = \text{const}$ erfüllen, bilden eine Niveaufläche im R^3 . Der Gradient einer solchen Funktion entspricht:

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Durch das Vektorfeld (2.14) ist die Definition einer Orientierung bzw. eines Einheitsnormalenvektorfeldes $N(P)$ auf der Niveaufläche gegeben, d.h. $N(P) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$. Die Änderung des Gradienten ∇F in eine beliebige Richtung v ist durch die Hessematrix H bestimmbar:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

In [BELYAEV et al., 1998] wird auf die Gleichheit von 2 Eigenwerten bzw. 2 Eigenvektoren und Hauptkrümmungen bzw. Hauptkrümmungsrichtungen folgender Matrix hingewiesen:

$$-\nabla N = \frac{1}{|\nabla F|} (I - NN^T) H \quad (2.16)$$

Der dritte Eigenvektor entspricht der Flächennormale, d.h. dem Gradienten ∇F , der zugehörige Eigenwert ist Null. Eine weitere Möglichkeit, Krümmungsgrößen für implizit beschriebene Oberflächen zu berechnen, wird in [HUGHES, 2003] vorgestellt. Hierzu ist die Angabe einer beliebigen orthonormalen Basis (b_1, b_2) für Vektoren innerhalb der Tangentialebene notwendig. Die Beschreibung der Tangentialebene erfolgt durch P und $N(P)$. Durch die Angabe einer solchen Basis ist dann die Krümmungsberechnung anhand folgender Matrix möglich:

$$W = \frac{1}{\|\nabla F\|} \begin{bmatrix} b_1^T H(x, y, z) b_1 & b_1^T H(x, y, z) b_2 \\ b_2^T H(x, y, z) b_1 & b_2^T H(x, y, z) b_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Die Eigenwerte von (2.17) entsprechen den Hauptkrümmungen, die beiden Eigenvektoren enthalten die Koordinaten der Hauptkrümmungsrichtungen bzgl. der Basis (b_1, b_2) . In [HUGHES, 2003] wird weiterhin gezeigt, dass die Bestimmung von (2.17), d.h. also die Berechnungen der Normalkrümmungen, auch mit einer orthogonalen Basis b_1, b_2 möglich ist. Neben der Bestimmung von Gauß'scher und

mittlerer Krümmung durch (2.5) existieren auch Verfahren, diese Größen direkt durch einzelne partielle Ableitungsgrößen von $F(x, y, z)$ zu berechnen [LOHMANN, 1998; HUGHES, 2003]. Die Voraussetzung zur Krümmungsbestimmung auf implizit beschriebenen Oberflächen ist also die Bestimmung partieller Ableitungsgrößen 1. und 2. Ordnung zur Approximation des Gradienten (2.14) und der Hessematrix (2.15).

2.2 Eigenschaften von Daten zur Geometriebeschreibung

Die Beschreibung von realen Phänomenen erfolgt durch eine diskrete Abtastung des zu untersuchenden Phänomens, d.h. an einzelnen Positionen P_i werden Messungen durchgeführt. Durch die Zuordnung von Messwerten an Positionen P_i im \mathbb{R}^3 , d.h. $w(P_i) = w_i$ sind Daten mit räumlichen Bezug gekennzeichnet. Um nun anhand solcher Abtastwerte das reale Phänomen zu rekonstruieren, d.h. die Möglichkeit der Bestimmung von Werten an einer beliebigen Stelle innerhalb des abgetasteten Gebietes, werden unter anderem Gitterstrukturen eingesetzt. Gitterstrukturen bieten die Möglichkeit einer formalen Beschreibung von Zusammenhangsinformationen zwischen gegebenen Messpunkten. Die Zusammenhangsinformationen für räumliche Daten sind i.a. in Form eines ungerichteten Graphen $G = V, E, F$ beschreibbar. In diesem Fall entspricht

- $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ einer Menge von Knoten
- E einer Menge von Kanten e_{ij} , wobei $e_{ij} \in E$, falls v_i und v_j , d.h. P_i und P_j benachbart sind
- F einer Menge von Zellen, d.h. eine Unterteilung des gültigen Bereichs von G in einzelne durch Kanten abgeschlossenen Bereiche die keine weiteren Knoten und Kanten bzw. Teile von Kanten aus G enthalten

Kennzeichnend für die Beschreibung eines räumlichen Phänomens durch Messpunkte mit zugehöriger Gitterstruktur ist also zum einen die tatsächliche Position sowie die Angabe einer Umgebungsbeschreibung in Form eines Graphen. Im weiteren Verlauf wird eine eindeutige Abbildung von Positionen der gegebenen Messpunkte zu Knoten des Graphen vorausgesetzt. Bei der Rekonstruktion von Werten so strukturierter Daten an einer beliebigen Stelle P innerhalb des Gitters ist zu entscheiden, welche Abtastwerte bei der Berechnung von $w(P)$ zu beachten sind. Somit sind Abtastwerte an den Gitterpunkten P_i zusätzlich durch einen Wirkungsbereich gekennzeichnet. Der Einfluss des Wertes $w(P_i)$ innerhalb dieses Wirkungsbereichs wird i.a. in Form einer Basisfunktion B_i beschrieben. Die Berechnung von $B_i(P)$ erfordert also die Lokalisation von P innerhalb der Wirkungskreise der Gitterpunkte P_i und anschließenden Auswertung der jeweiligen Basisfunktion an der entsprechen-

den Stelle. Dann läßt sich die Rekonstruktion $w(P)$, durch eine Interpolation, d.h. $w(P_i) = w_i$, wie folgt beschreiben:

$$w(P) = \sum B_i(P) \quad B_i(P_j) = \begin{cases} w_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

Bei der Bestimmung von $B_i(P)$ kann zwischen gitterabhängigen und gitterunabhängigen Basisfunktionen unterschieden werden, d.h. die Bestimmung erfordert die Lokalisation von P innerhalb der Gitterstruktur oder erfolgt ohne Beachtung von Zusammenhangsinformationen.

Die Zusammenhangsinformation von Volumendaten ist i.a. in Form eines 3D blockstrukturierten Gitters gegeben, d.h. die Gitterzellen sind achsenparallele rechteckige Quader. Durch $w(P_i)$ sind skalare Werte gegeben, anhand derer eine Oberflächenbeschreibung rekonstruiert werden kann.

Die Oberflächenbeschreibung im R^3 erfolgt durch Dreiecksnetze, d.h. dreieckige Gitterzellen. Für diese Oberflächendaten gilt $w(P_i) = P_i$, d.h. die Position entspricht dem zugehörigen Wert an der Stelle P_i . Die Modelle sind das Ergebnis eines zweistufigen Prozesses: einer Segmentierung und anschließenden Rekonstruktion. Die Segmentierung liefert eine Menge von Voxeln, d.h. Gitterzellen innerhalb blockstrukturierter Volumendaten, die als objektzugehörig gekennzeichnet sind. Anschließend wird für die markierten Voxel die Oberfläche bestimmt, z.B. durch das *Marching Cubes* Verfahren. Das Ergebnis dieser Rekonstruktion ist eine triangulierte Beschreibung der Objektoberfläche.

2.3 Krümmungsberechnung auf Oberflächenmodellen

Die Krümmungsbestimmung auf diskreten Oberflächendaten erfolgt durch Übertragung der Methoden für kontinuierliche Modelle auf diskrete Geometriebeschreibungen. Bei einer solchen Herangehensweise bilden die differentialgeometrischen Verfahren für parametrisierte Oberflächen die Grundlage für die approximativen Methoden der Krümmungsberechnung auf diskreten Modellen. Die vorgestellten Techniken zur Bestimmung von Krümmungsinformation lassen sich in folgende zwei Klassen unterscheiden:

- *Curve Fitting* - kantenbasiert
- *Surface Fitting* - flächenbasiert

Bei *Curve Fitting* Techniken werden Approximationstechniken der Normalenkrümmungen κ_N entlang inzidenter Kanten zur Bestimmung der Krümmungsgrößen eingesetzt. *Surface Fitting* Verfahren hingegen sind gekennzeichnet durch die Besti-

mung einer geeigneten Passfläche, deren Beschreibung dann wiederum zur Krümmungsbestimmung verwendet wird.

2.3.1 Surface Fitting

Die Auswahl einer geeigneten Passfläche erfolgt in zwei Schritten. Erst wird eine parametrisierte Beschreibung einer Punktumgebung erzeugt. Anschließend wird eine Abbildung dieses Parameterbereichs auf die entsprechende Punktumgebung bestimmt. Die Parametrisierung setzt die Angabe einer zu parametrisierenden Umgebung um einen Punkt P_i voraus. Eine solche Umgebungsbeschreibung ist für triangulierte Oberflächenmodelle in Form einer Menge $nhd(P_i)$ möglich. $nhd(P_i)$ enthält alle Knoten, Kanten und Flächen der Zusammenhangsbeschreibung, d.h. des ungerichteten Graphen G , die als umgebungszugehörig gelten. Im weiteren Verlauf soll $nhd(P_i) \subset G$ gelten, d.h. $nhd(P_i)$ enthält nur Knoten, Kanten und Flächen aus G . Hierbei wird i.a. die Zugehörigkeit eines Elements anhand einer Metrik bzgl. der Knoten $d(v_i, v_j)$ bzw. Punkte $d(P_i, P_j)$ bestimmt (Abb.2.6). Somit enthält $nhd(P_i)$ alle Knoten bzw. Punkte, die innerhalb eines Radius r liegen, d.h. $d(v_i, v_j) < r$ bzw. $d(P_i, P_j) < r$ sowie die Elemente, d.h. Kanten und Flächen, die die entsprechenden Knoten enthalten. Die Zugehörigkeit eines Punktes P_j zu $nhd(P_i)$ ist unter anderem durch folgende Metriken bestimmbar, z.B.

- Topologisch $d_T(v_i, v_j)$ und $r \in \mathbb{N}$, d.h. maximale Anzahl der Kanten des kürzesten Weges von $P_j \in nhd(P_i)$ zu P_i
- Euklidisch $d_E(P_i, P_j)$ und $r \in \mathbb{R}$, d.h. maximaler euklidischer Abstand zwischen $P_j \in nhd(P_i)$ und P_i
- Geodätisch $d_G(P_i, P_j)$ und $r \in \mathbb{R}$, d.h. maximale Länge der kürzesten Verbindungslinie auf der triangulierten Oberfläche zwischen $P_j \in nhd(P_i)$ zu P_i

Topologische Metriken verwenden zur Zugehörigkeitsbestimmung eines Gitterpunktes nur Zusammenhangsinformation. Zur Berechnung mit Hilfe einer euklidischen Metrik sind wiederum nur die räumlichen Positionsangaben der Gitterpunkte notwendig. Im Fall einer geodätischen Metrik werden sowohl räumliche als auch topologische Informationen benötigt, da jetzt Abstände entlang bzw. auf einer Oberfläche im R^3 zu bestimmen sind. Die Menge $nhd(P_i)$ ist also bei gegebener Metrik $d_{T,E,G}$ eindeutig durch die Angabe eines maximal zulässigen Radius bestimmt, da für jeden Punkt P_j dessen Zugehörigkeit zu $nhd(P_i)$ entscheidbar ist. Weiterhin gilt $P_i \in nhd(P_i)$.

$nhd(P_i)$ mit d_T und $r = 1$ wird auch als $1Ring(P_i)$ oder $star(P_i)$ bezeichnet.

Das Ziel einer Parametrisierung von $nhd(P_i)$ mit $P_i \in R^3$ ist eine Abbildung der Zusammenhangsinformationen auf einen planaren Graphen $\overline{nhd}(P_i)$. Innerhalb dieses 2-dimensionalen Parameterbereichs ist die Beschreibung der Punkte $P_j \in$

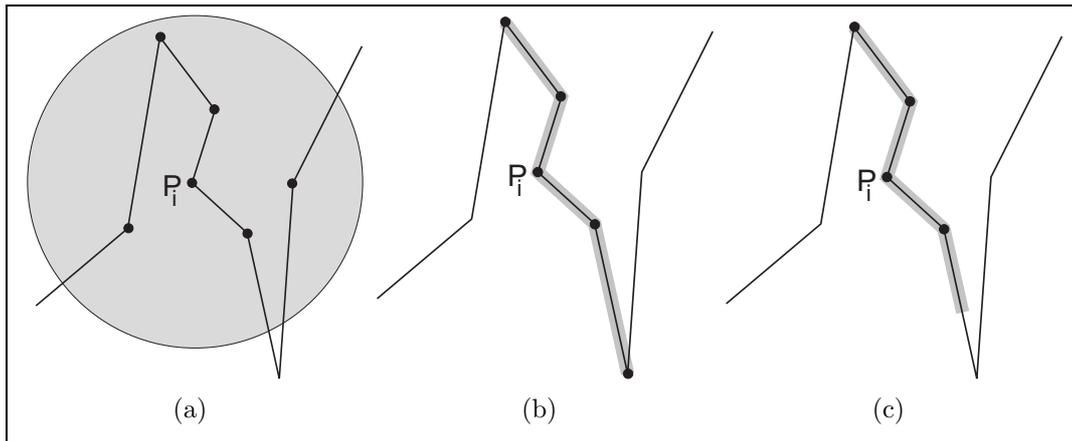


Abbildung 2.6: Mögliche Nachbarschaften von Punkten mit gegebener Zusammenhangsinformation (schwarze Linie) und Kennzeichnung von $nhd(P_i)$ für (a) euklidische, (b) topologische und (c) geodätische Metriken (grau eingefärbte Gebiete), sowie Hervorhebung der Punkte $P_j \in nhd(P_i)$ (schwarze Kreise)

$nhd(P_i)$ durch Koordinatenpaare $\overline{P_j} = (u_j, v_j)$ möglich. Bei der Parametrisierung von Punktumgebungen kann bzgl. der gegebenen Gitterstruktur zwischen:

- topologieunabhängig: keine Beachtung von Kanten und Flächenbeziehungen zwischen Punkten aus $nhd(P_i)$
- topologieabhängig: Abbildung von $nhd(P_i)$ auf isomorphen kreuzungsfreien Graphen $\overline{nhd}(P_i)$ im R^2

unterschieden werden. Die durch eine Parametrisierung $\overline{nhd}(P_i)$ gegebene Abbildung einer Punktumgebung $nhd(P_i)$ kann aber auch bzgl. der auftretenden bzw. zulässigen Verzerrungen charakterisiert werden, z.B. durch die Angabe einer Abweichung von einer isometrischen oder konformen Beschreibung von $nhd(P_i)$ durch $\overline{nhd}(P_i)$. Im Folgenden sollen kurz drei mögliche Parametrisierungsmethoden von $nhd(P_i)$ vorgestellt werden.

Die Parametrisierung mit Hilfe einer Projektion von $nhd(P_i)$ in eine Ebene e ist ein topologieunabhängiges Verfahren. Hierbei ist zum einen die Definition einer Ebene $e : (P_e, n_e)$ durch Punkt P_e und Normale n_e sowie die Angabe einer Projektionsrichtung t_{proj} notwendig. Zusätzlich zur Projektion aller $P_j \in nhd(P_i)$ in die Ebene e erfolgt eine Beschreibung der projizierten Punkte bzgl. einer Basis (b_1, b_2, n_e) , wobei b_1, b_2 linear unabhängige Vektoren innerhalb von e sind. Der Ursprung einer solchen Basis kann ein beliebiger Punkt in der Ebene e sein. In [GOLDFEATHER, 2001] wird die Parametrisierung von $nhd(P_i)$ bzgl. der Tangentialebene $T(P_i)$, d.h. $e : (P_i, N(P_i))$ mit der Projektionsrichtung entlang von $t_{proj} = N(P_i)$ vorgeschlagen. Weiterhin wird eine orthonormale Basis $(b_1, b_2, N(P_i))$ mit dem Ursprung in P_i vorausgesetzt.

In [WELCH und WITKIN, 1994] wird zur Parametrisierung von $nhd(P_i) = star(P_i)$ eine Approximation geodätischer Polarkoordinaten (Abb. 2.5) eingesetzt, d.h. es werden Parameterkoordinaten in der Form $(u_j, v_j) = (\phi, r)$ bestimmt. Hierzu wird die Summe der Winkel zwischen den Kanten $v_{i,j} \in star(P_i)$ und $v_{i,k} \in star(P_i)$ berechnet, falls $v_{j,k} \in star(P_i)$. Anschließend werden diese Winkel einheitlich skaliert, so dass deren Summe 2π ergibt. Diese neuen Winkel entsprechen den ϕ -Koordinaten. Die r -Koordinate bezeichnet den euklidischen Abstand $d_E(P_i, P_j)$.

Eine topologieabhängige und möglichst verzerrungsfreie Parametrisierung von $nhd(P_i)$ wird in [ECK et al., 1995] vorgestellt. Hierzu ist die Angabe einer Abbildung von Randpunkten aus $nhd(P_i)$ auf Punkte eines konvexen Polygons im R^2 erforderlich. Alle anderen Parameterkoordinaten von Punkten $P_j \in nhd(P_i)$ werden anhand der Minimierung eines Optimierungsproblems E bestimmt, das folgendermaßen gegeben ist:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{v_{j,k} \in nhdP_i} \rho_{j,k} (\overline{P_j} - \overline{P_k})^2 \quad (2.19)$$

Weiterhin wird darauf hingewiesen, dass die Bestimmung der Parameterkoordinaten nach (2.19) Punkte innerhalb des konvexen Polygons liefert. Der Berechnung des Faktors $\rho_{j,k}$ erfolgt in Abhängigkeit von der Länge und Flächeninhalten der beiden angrenzenden Dreiecke an die Kante $v_{j,k}$, um eine möglichst konforme Abbildung zu erzeugen.

Bei gegebener Beschreibung von $P_j \in nhd(P_i)$ in der Parameterebene durch (u_j, v_j) Koordinaten ist dann die Auswahl einer geeigneten Abbildung $F : R^2 \rightarrow R^3$ notwendig, die zur Beschreibung der diskreten d.h. triangulierten Geometrie durch eine kontinuierliche Fläche dient. Die Auswahl der Abbildung F erfolgt üblicherweise durch die Lösung eines Optimierungsproblems OPT , d.h.

$$\min \rightarrow OPT(\dots, F(\overline{P_j}), P_j, \dots) \quad (2.20)$$

Üblicherweise entspricht die Formulierung von OPT einem *Least Squares* Verfahren. Das Optimierungsproblem (2.20) erhält in diesen Fällen folgende Gestalt:

$$\min \sum (F(\overline{P_j}) - P_j)^2 \quad (2.21)$$

Anhand der so bestimmten Abbildung $F(u, v)$ werden dann die Größen (2.11) der *I* und *II* Fundamentalform an der $F(u_i, v_i)$ ermittelt. Diese Werte ermöglichen die Berechnung der Elemente der Weingartenabbildung, anhand derer wiederum die Krümmungsgrößen bestimmt werden können.

Zur Annäherung der Punktumgebung $nhd(P_i)$ durch eine quadratische Funktion wird in [GOLDFEATHER, 2001] die Parametrisierung der gegebenen Umgebungsbeschreibung durch eine Projektion in die Tangentialebene vorgeschlagen. Die Be-

schreibung von $P_j = (x_j, y_j, z_j)$, $P_j \in nhd(P_i)$ in der orthonormalen $(b_1, b_2, N(P_i))$ Basis liefert dann die gesuchten Parameterkoordinaten, d.h. $(u_j, v_j) = (x_j, y_j)$. Die ermittelte Abbildung entspricht somit einer quadratischen Approximation von $nhd(P_i)$ bzgl. der $(b_1, b_2, N(P_i))$ Basis. Somit ist folgende Abbildungsfunktion gesucht:

$$z_j = f(x_j, y_j) = \frac{A}{2}x_j^2 + Bx_jy_j + \frac{C}{2}y_j^2 \quad (2.22)$$

Für P_i läßt sich aufgrund der Annahme, dass $T(\overline{P_i})$ der Projektionsebene entspricht, die Weingartenabbildung folgendermaßen angeben:

$$W = \begin{bmatrix} AB \\ BC \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Die Bestimmung der unbekanntenen Größen (A, B, C) aus (2.23) in Form eines *Least Squares* Problems kann anhand von (2.22) wie folgt in Matrixform beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_0^2 & x_0y_0 & \frac{1}{2}y_0^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}x_n^2 & x_ny_n & \frac{1}{2}y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Eine weitere Variante der Beschreibung einer Punktumgebung $nhd(P_i)$ durch eine Passfläche ist die von [GOLDFEATHER, 2001] vorgestellte Kubische-Adjazenz-Normalen-Methode. Bei diesem Verfahren wird die gleiche Parametrisierung wie im Fall der quadratischen Passfläche verwendet. Zusätzlich werden aber noch die Normalen der Punkte $P_j \in nhd(P_i)$ in das lokale Koordinatensystem $b_1, b_2, N(P)$ transformiert. Mit Hilfe der Parameterkoordinaten und zugehörigen Normalen $N(P_j) = (a_j, b_j, c_j)$ bzgl. der Basis $b_1, b_2, N(P)$ ist dann die Approximation von $nhd(P_i)$ durch folgende kubische Fläche möglich:

$$z = f(x, y) = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + G^3 \quad (2.25)$$

Für P_i hat die Weingartenabbildung, wiederum aufgrund der Annahme, dass $T(\overline{P_i})$ der Projektionsebene entspricht, dann die gleiche Gestalt wie im Fall der quadratischen Fläche:

$$W = \begin{bmatrix} AB \\ BC \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Zur Bestimmung der gesuchten Größen A, B, C für (2.26) ist aber die Bestimmung aller unbekanntenen Größen aus (2.25) notwendig, d.h. die Berechnung von

Die Funktionen B_k^2 bzw. B_l^2 in (2.31) entsprechen den quadratischen Bernstein-Polynomen [LES PIEGL, 1995]. Die Flächen (2.31) sind für $0 < u < 1.0$ und $0 < v < 1$ zweimal differenzierbar. Somit können auch die Fundamentalgrößen (2.11) und demzufolge die Krümmungsinformation an einem Punkt analytisch berechnet werden. Zur Ableitungsberechnung für (2.31) kann der für die Differentiation von Bezierkurven in [LES PIEGL, 1995] beschriebene Zusammenhang:

$$\frac{d\left(\sum_{k,n}(u) \mathbf{P}_k\right)}{du} = n \sum_{k=0}^{n-1} (u) (\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k) \quad (2.32)$$

genutzt werden. Durch (2.32) ist eine analytische Bestimmung der notwendigen partiellen Ableitungsgrößen in Abhängigkeit von den Kontrollpunkten $\mathbf{P}_{k,1}$ möglich. Diese Ableitungen werden bzgl. einer Parameterkoordinate u oder v ermittelt, d.h. entlang einer Isoparameterlinie auf der Fläche (2.31). Diese Isoparameterlinie entspricht einer Bezierkurve deren Kontrollpunkte durch den Isoparameterwert berechenbar sind. Diese Kontrollpunkte können dann zur Bestimmung der gesuchten Ableitungsgröße nach (2.32) verwendet werden.

Im Gegensatz zu den bereits beschriebenen *Surface Fitting* Verfahren kann die Existenz einer orthonormalen Basis für die Tangentialebene für diese Flächen nicht mehr garantiert werden. Somit ist auch keine Berechnung von $\kappa_1, \kappa_2, t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2}$ durch die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren der Weingartenmatrix mehr möglich. In [SCHOENE, 1975] wird zur Berechnung der Hauptkrümmungsrichtungen das Verhältnis der Koordinaten von Tangentialvektoren $t = (a, b)$ genutzt, d.h. $\lambda = a : b$. Durch das Lösen zweier quadratischer Gleichungen (2.34) ist die Berechnung von λ_1 und λ_2 sowie von κ_1 und κ_2 möglich.

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa + (LN - M^2) = 0 \quad (2.33)$$

$$(FN - GM)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda + (EM - FL) = 0 \quad (2.34)$$

Die Beschreibung der Hauptkrümmungsrichtungen erfolgt durch λ_1 und λ_2 . Diese beiden Werte entsprechen den Verhältnisse der Koordinaten von t_{κ_1} und t_{κ_2} innerhalb der Basis

Eine Parametrisierung von $nhd(P_i)$, d.h. die Abbildung in eine Einheitsquadrat, ist unter anderem durch die Anwendung der topologierehaltenden Parametrisierung von [ECK et al., 1995] realisierbar. Hierzu werden die Randpunkte von $nhd(P_i)$ auf einen Kreis mit Radius $r = 0.5$ und Mittelpunkt an $(0.5, 0.5)$ abgebildet und anschließend die restlichen Koordinaten durch (2.19) bestimmt. Danach sind die Kontrollpunkte $\mathbf{P}_{k,1}$ durch Lösen eines *Least Squares* Problems berechenbar.

$$\begin{bmatrix} B_{0,0}^2(u_i, v_i) & B_{0,1}^2(u_i, v_i) & \dots & B_{2,1}^2(u_i, v_i) & B_{2,2}^2(u_i, v_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{P}_{k,1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ P_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Die Krümmungsbestimmung wird dann bzgl. der ermittelten Parameterkoordinaten (u_i, v_i) von P_i durchgeführt.

Die ersten zwei *Surface Fitting* Methoden benötigen die Definition einer Normale für einen Punkt der triangulierten Oberfläche. Durch deren Orientierung ist dann die zugehörige Tangentialebene, der Parameterbereich, bestimmt. Anschließend erfolgt die Projektion. Bei der Parametrisierung durch [WELCH und WITKIN, 1994] bzw. durch [ECK et al., 1995] hingegen ist die Angabe einer Normalen nicht erforderlich.

2.3.2 Curve Fitting

Die Methoden zur Bestimmung von Krümmungsinformation durch *Curve Fitting* sind gekennzeichnet durch die Approximation der Normalenkrümmung κ_N entlang der inzidenten Kanten an P_i . Die Abschätzung von κ_N erfolgt für die Kanten e_{ij} , mit $P_j \in nhd(P_i)$. Eine mögliche Approximation der Normalenkrümmung pro Kante ist dann durch die Abschätzung des zugehörigen Krümmungskreises (2.2) möglich:

$$\kappa_N = \frac{2N(P_j - P_i)}{\|P_j - P_i\|^2} \quad (2.36)$$

Die Approximation von κ_N einer Flächenkurve durch (2.36) entspricht der in Abb. 2.7 gezeigten Approximation einer Flächenkurve entlang e_{ij} durch einen Kreis. Der Zusammenhang (2.3) bildet die Grundlage für das in [GOLDFEATHER, 2001] vorgestellte Verfahren, anhand der approximierten Normalenkrümmungen $\kappa_{\bar{N}}$ die Elemente der Weingartenabbildung zu bestimmen. Hierzu ist noch die Beschreibung der Tangentenrichtung der Kante e_{ij} durch einen normierten Vektor (x, y_i) innerhalb einer beliebigen orthonormalen Basis innerhalb der Tangentialebene erforderlich. Dann gilt:

$$\kappa_{\bar{N}} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Die Gleichung (2.37) enthält die unbekanntenen Größen (A, B, C) . Eine Berechnung dieser Werte ist dann durch folgendes *Least Square* Verfahren in Matrixform möglich:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ x_i^2 & 2x_i y_i & y_i^2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{\bar{N}} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

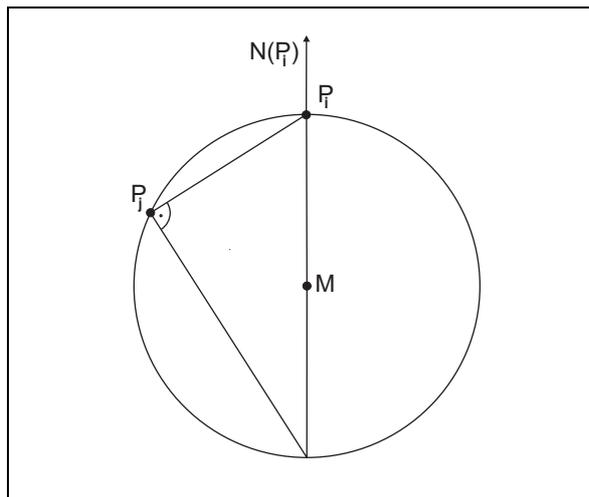


Abbildung 2.7: geometrische Deutung des durch (2.36) approximierten Krümmungskreises aus Abb. 2.1, $N(P_i)$ bezeichnet die Normale im Punkt P_i

In [TAUBIN, 1995] wird der Zusammenhang zwischen der orthonormalen Basis $t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2}, N(P)$ und einer anderen, beliebigen orthonormalen Basis (U_1, U_2, U_3) ausgenutzt, um die Krümmungsinformation anhand einer Matrix, die durch (2.39) gegeben ist, zu bestimmen. Die Beschreibung von normierten Tangentenrichtungen innerhalb der orthonormalen Basis $(t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2}, N(P))$ sei durch t_ϕ gegeben. Durch t_ϕ wird die Richtung bzgl. eines Winkels ϕ und einer der Achsen (t_{κ_1} oder t_{κ_2}) bezeichnet. Mit Hilfe dieser Richtungsbeschreibung wird dann folgende symmetrische Matrix definiert:

$$M_P = \frac{1}{2\pi} \int \kappa_N t_\phi t_\phi^T d\phi \quad (2.39)$$

Die Matrix M besitzt aufgrund der Symmetrie 3 von Null verschiedene Eigenvektoren und zugehörige reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren von M aus (2.39) entsprechen den Hauptkrümmungsrichtungen t_{κ_1} und t_{κ_2} und der Normale $N(P)$. Der zu $N(P)$ gehörende Eigenwert ist 0. Anhand der beiden anderen Eigenwerte λ_1, λ_2 lassen sich die Hauptkrümmungen wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ \kappa_2 &= 3\lambda_2 - \lambda_1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Anschließend wird in [TAUBIN, 1995] darauf hingewiesen, dass die Bestimmung von M_P bzgl. einer beliebigen orthonormalen Basis (U_1, U_2, U_3) ebenfalls zur Approximation von Krümmungsinformation eingesetzt werden kann. So stimmen Eigenwerte und Eigenvektoren von M_P bzgl. (U_1, U_2, U_3) mit denen von M_P bzgl. der Basis $(t_{\kappa_1}, t_{\kappa_2}, N(P))$ überein. Hieraus folgt, dass die Beschreibung der Tangentenvektoren innerhalb einer globalen Koordinatensystems, d.h. orthonormalen Basis, (U_1, U_2, U_3) ausreicht, um die Krümmungsgrößen für jeden Punkt zu bestimmen.

Zur Approximation von M_P nach (2.39) wird die Berechnung einer Matrix $\overline{M_P}$ vorgeschlagen:

$$\overline{M_P} = \sum_{P_j \in \text{star}(P_i)} w_{ij} \kappa_N t_{ij} t_{ij}^T \quad (2.41)$$

In (2.41) entspricht t_{ij} der normalisierten Projektion der Kante von P_i nach P_j in die Tangentialebene. Die Normalenkrümmung κ_N wird durch (2.36) abgeschätzt. Der Skalierungsfaktor w_{ij} ist abhängig vom Flächeninhalt der an die Kante e_{ij} angrenzenden Dreiecke. Für die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\overline{M_P}$ gilt dann; Eigenvektoren entsprechen den Hauptkrümmungsrichtungen bzgl. der Basis (U_1, U_2, U_3) und die Eigenwerte können zur Berechnung der Hauptkrümmungen nach (2.40) eingesetzt werden.

In [BARR et al., 2002] wird ein Verfahren vorgestellt, dass die Berechnung der Gauß'scher Krümmung K und mittleren Krümmung H für einen Punkt eines Dreiecksnetzes ermöglicht. Anhand der Krümmungsgrößen H und K sind dann nach Umstellen von (2.5) die Hauptkrümmungen folgendermaßen bestimmbar:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Grundlage für die Approximation von H ist der Zusammenhang zwischen lokaler Flächenänderung und mittlerer Krümmungsnormale Hn (2.7). Zur Approximation des mittleren Krümmungsvektors ist also die Beschreibung einer Umgebung U für jeden Punkt P_i des Dreiecksnetzes notwendig. Für diese Umgebung ist dann der Flächeninhalt $A(U)$ und die Änderung des Flächeninhaltes in Abhängigkeit von P_i zu bestimmen. Für die Begrenzung der Punktumgebung U werden baryzentrische und Voronoi-Zellen verwendet (Abb. 2.8). Die stückweise lineare Begrenzungskurve der Umgebung enthält die Mittelpunkte der Kanten v_{ij} . Innerhalb der zu P_i adjazenten Dreiecke durchläuft die Begrenzungskurve bei baryzentrischer Umgebung den Dreiecksschwerpunkt und im Fall einer Voronoi-Zerlegung den Mittelpunkt des Umkreises. Zur Bestimmung von $A(U)$ wird über alle inzidenten Dreiecke von P_i iteriert und der jeweilige Flächeninhalt des zur Umgebung von P_i gehörigen Bereichs innerhalb des Dreiecks berechnet. Für spitzwinklige Dreiecke werden die Voronoi-Zellen verwendet. Im Fall stumpfer Dreiecke wird der Flächeninhalt bzgl. der Baryzentren berechnet. Die Berechnung der Verschiebungsrichtung Hn von P_i , für die eine maximale Änderung des Flächeninhaltes der Umgebung eintritt, wird wie folgt bestimmt:

$$\nabla A = \frac{1}{2} \sum (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (P_i - P_j) \quad (2.43)$$

Durch α_{ij} und β_{ij} sind die beiden der Kante v_{ij} gegenüberliegenden Winkel bezeichnet. So lässt sich der mittlere Krümmungsvektor folgendermaßen approximieren:

$$2Hn = \frac{1}{2A(U)} \sum (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (P_i - P_j) \quad (2.44)$$

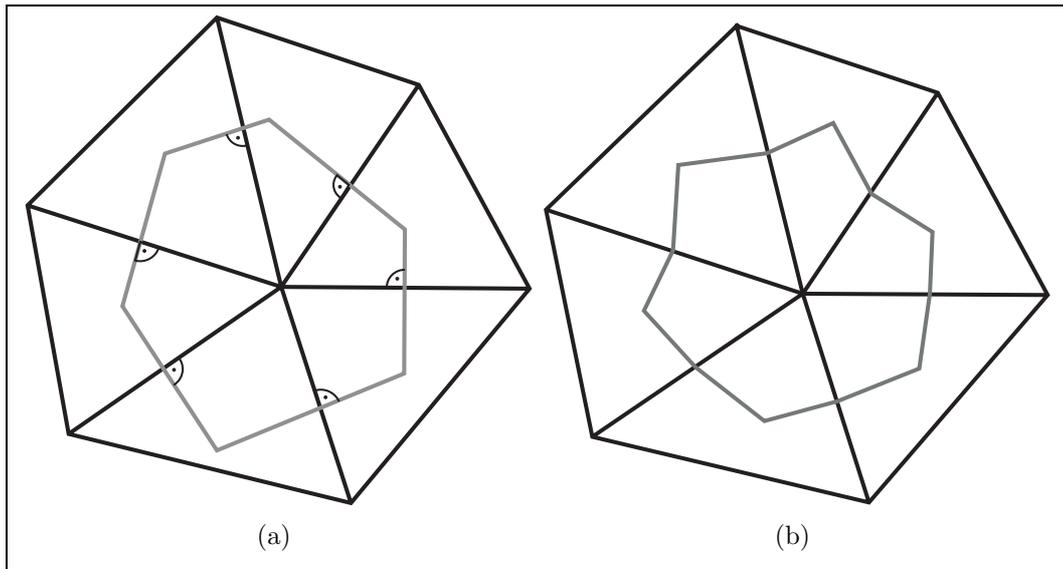


Abbildung 2.8: Umgebungen zur Skalierung der berechneten mittleren und Gauß'schen Krümmung, (a) Voronoi Region, (b) Umgebungsbeschreibung durch Baryzentren inzidenter Dreiecke

Zur Bestimmung der Gauß'sche Krümmung hingegen ist die Approximation von A_G notwendig, d.h. der Flächeninhalt der Gauß-Abbildung von A_M ist zu berechnen. In [BARR et al., 2002] wird mit dem Verweis auf das Gauß-Bonnet-Theorem [STRUBECKER, 1969] die folgende Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des sphärischen Bildes von A verwendet:

$$A_G = 2\pi - \sum \phi_j \quad (2.45)$$

In (2.45) bezeichnet ϕ_j den Winkel eines inzidenten Dreiecks an P_i . Mit Hilfe dieser Approximation von A_G durch (2.45) ist die Gauss'sche Krümmung dann durch:

$$K = \frac{2\pi - \sum \phi_j}{A_M} \quad (2.46)$$

bestimmbar. Hauptkrümmungsrichtungen werden anschließend wie in [GOLDFEATHER, 2001] berechnet. Hierbei wird noch die mittlere Krümmung H zur Definition einer linearen Bedingung für das *Least Squares* Problem verwendet.

2.4 Krümmungsberechnung in Volumendaten

Volumendaten können als diskrete Beschreibung einer impliziten Funktion im R^3 verstanden werden. Zur korrekten Krümmungsapproximation durch (2.17) an einer Stelle innerhalb des blockstrukturierten Gitters ist die Rekonstruktion von

Werten, Gradienten und Hessematrix an dieser Position der abgetasteten impliziten Funktion notwendig.

Die Rekonstruktion eines kontinuierlichen eindimensionalen Signals g_C anhand einer diskreten Beschreibung g_D ist durch Filter möglich. Die Faltung, d.h. die Anwendung des Filters, eines Signals g_D mit h liefert ein neues Signal g_F . Eine Filterung bzw. Faltung ist folgendermaßen definiert:

$$g_F(x_0) = g(x) \otimes h(x) = \int g(\tau)h(x_0 - \tau)d\tau \quad (2.47)$$

Als Gütefunktion des rekonstruierten Signals gilt der Unterschied zwischen dem originalen und rekonstruierten Signal, d.h. zwischen g_F und g_C . Ob sich g_C anhand von g_D wiederherstellen lässt, ist abhängig von der im Originalsignal auftretenden maximalen Frequenz und der verwendeten Abtastfrequenz bei der Diskretisierung. Für die Abtastfrequenz gilt die Nyquist Rate als Voraussetzung zur vollständigen Rekonstruktion von g_C [FOLEY et al., 1997]. Weiterhin entscheidend für die Güte von g_F ist der eingesetzte Rekonstruktionsfilter h . Durch den *sinc* Filter ist bei korrekt durchgeführter Abtastung eine vollständige Rekonstruktion von g_C möglich. Dieser Filter beschreibt die ideale Filterfunktion. Die Ableitungsbestimmung für g_F ist ebenfalls durch Filter möglich [LOHMANN, 1998], denn es gilt:

$$g_F^n(x_0) = g(x) \otimes h^n(x) = \int g(\tau)h^n(x_0 - \tau)d\tau \quad (2.48)$$

Da durch den *sinc* Filter ein idealer Rekonstruktionsfilter gegeben ist, entsprechen Faltungen mit dessen n ter-Ableitungen ebenfalls vollständigen n te-Ableitungsrekonstruktionen. Da der *sinc* Filter und dessen n te Ableitung unendliche Ausdehnung besitzen, ist deren Anwendung, d.h. die korrekte Faltung mit dem *sinc* Filter bzw. dessen n -ter Ableitung, für begrenzte diskrete Daten nicht möglich [MARSCHNER und LOBB, 1994]. Die Annäherung an eine idealen Rekonstruktion der n ten Ableitung kann unter anderem folgendermaßen realisiert werden:

- Begrenzung des sinc^n Filters, $\text{sinc}_{truncated}^n(t) = \begin{cases} t_{extent} \leq |t| & \text{sinc}(t) \\ \text{sonst} & 0 \end{cases}$
- Fensterung des sinc^n Filters $\text{sinc}_{windowed}^n(t) = \text{window}(t) \text{sinc}(t)$
- Approximation des sinc^n Filters in einem Intervall $t_{extent} > |t|$ durch einen andere Filterfunktion h , d.h. $h(t) = 0$ für $t_{extent} \leq |t|$

Zur vollständigen Rekonstruktion von Volumendaten ist die Faltung mit einem 3D *sinc* Filter notwendig. Dieser Filter ist separierbar, d.h. durch das Tensorprodukt von 3 einzelnen *sinc* Filtern beschreibbar. Eine Faltung entspricht dann:

$$\begin{aligned}
g_F(x_0) &= g_D(x) \otimes \text{sinc}_{3D}(x) \\
&= ((g_D(x) \otimes \text{sinc}_x(x)) \otimes \text{sinc}_y(x)) \otimes \text{sinc}_z(x) \\
&= \int \text{sinc}_z(x_0 - \tau) \left(\int \text{sinc}_x(x_0 - \tau) \left(\int g_D(\tau) \text{sinc}_x(x_0 - \tau) d\tau_x \right) d\tau_y \right) d\tau_z
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Rekonstruktion partieller Ableitungen ist durch eine Faltung mit der entsprechenden *n*ten Ableitung des *sinc* Filters möglich. Wie im eindimensionalen Fall ist auch eine Approximation des 3D *sinc* Filters und dessen *n*ter Ableitung möglich. So lassen sich dann anhand von Filterfunktionen, die die eindimensionale *sinc* Funktion bzw. deren *n*te Ableitung approximieren, die entsprechenden 3D Ableitungsfiler zusammensetzen. Eine Faltung des Volumensignals, d.h. die Bestimmung einer partiellen Ableitung *n*ter Ordnung, ist dann entweder mit dem 3D-Tensorprodukt oder mit den 3 einzelnen separierten Ableitungskomponenten möglich.

Die nun vorgestellten Verfahren unterscheiden sich in der Art der Ableitungsapproximation. In [HLADUVKA, 2001] werden Krümmungsinformationen innerhalb von Volumendaten ohne Ableitungsapproximation durch Filterung bestimmt. Ein Verfahren, das die Bestimmung des Gradienten (2.14), d.h. die Approximation partieller Ableitungsinformation 1. Ordnung erfordert, wird anschließend beschrieben [INTERRANTE et al., 1996]. Danach folgt die Beschreibung einer Methode [KINDLMANN, 2003] zur Ermittlung von Krümmungsinformation bei der eine Filterung zur Approximation der Hessematrix (2.15) eingesetzt wird.

Ein Methode der Krümmungsapproximation, anhand von Rekonstruktionsfiltern ohne Abschätzung von Gradient oder Hessematrix in den Volumendaten, wird in [HLADUVKA, 2001] beschrieben. Die Krümmungsapproximation erfolgt für Punkte P_i einer Isofläche. Hierzu werden weitere Punkte auf der Isooberfläche bestimmt. Anschließend werden die Krümmungswerte für P_i durch ein *Curve Fitting* Verfahren berechnet, d.h. es werden die Normalenkrümmung der Flächenkurven von P_i zu den anderen Punkten auf der Isooberfläche mit Hilfe eines Krümmungskreises approximiert.

In [INTERRANTE et al., 1996] wird ein Verfahren zur Krümmungsbestimmung vorgestellt, bei dem der Gradient durch eine Faltung mit den partiellen Ableitungen des Gauß-Filters (2.50) ermittelt wird, der folgendermaßen definiert ist:

$$h_{\sigma, x_{max}} = \begin{cases} e^{-x^2/2\sigma^2} & \text{if } |x| < x_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.50}$$

Diese Berechnung geschieht als Teil der Vorverarbeitung der Volumendaten. Durch trilineare Interpolation der (x, y, z) Komponenten ist dann die Approximation des Gradienten an einer beliebigen Stelle innerhalb des Volumengitters P möglich. Der

so berechnete Gradient entspricht dem Normalenvektor der Isofläche für den Wert $w(P)$ an der Stelle P . Durch diesen Vektor kann also eine Beschreibung der Tangentialebene der Niveauläche an der Stelle P gegeben werden. Durch die Auswahl zweier beliebiger orthogonaler Vektoren t_{e1}, t_{e2} , die innerhalb der Tangentialebene liegen, ist dann die Approximation der Elemente der Weingartenmatrix (2.17) für implizite Funktionen möglich. Die Approximation der Gradientenänderung in die Richtungen t_{e1} und t_{e2} erfolgt hier durch die Zentrale-Differenzen-Methode, d.h. durch:

$$\begin{aligned} b_1^T H(x, y, z) b_1 &\rightarrow t_{e1} (G(P + t_{e1}) - G(P)) \\ b_1^T H(x, y, z) b_2 &\rightarrow t_{e1} (G(P + t_{e2}) - G(P)) \\ b_2^T H(x, y, z) b_2 &\rightarrow t_{e2} (G(P + t_{e2}) - G(P)) \\ b_2^T H(x, y, z) b_1 &\rightarrow t_{e2} (G(P + t_{e1}) - G(P)) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Anhand dieser approximierten Elemente der Weingartenmatrix (2.17) erfolgt dann die Bestimmung der gesuchten Krümmungsgrößen.

Ein Verfahren zur Krümmungsapproximation in Volumendaten, das die Bestimmung des Gradienten $G(P)$ (2.14) und der Hessematrix (2.15) $H(P)$ erfordert, wird in [KINDLMANN, 2003] vorgestellt. Die Approximation 1. und 2. partieller Ableitungen geschieht mit Hilfe eines BC-Filters:

$$h_{B,C}(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (12 - 9B - 6C) |x|^3 & \text{if } |x| < 1 \\ + (-18 + 12B + 6C) |x|^2 + (6 - 2B) & \\ (-B - 6C) |x|^3 + (6B + 30C) |x|^2 & \text{if } 1 \leq |x| < 2 \\ + (-12B - 48C) |x| + (8B + 24C) & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.52)$$

Die Ableitungsrekonstruktion erfolgt durch die Faltung mit der entsprechenden Ableitung der Filterfunktion $h_{1,0}$ (2.52). Hessematrix und Gradient werden dann zur Bestimmung einer Matrix nach (2.16) verwendet. Diese Matrix ermöglicht dann die Berechnung von Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen, durch die Bestimmung entsprechender Eigenwerte und Eigenvektoren.

2.5 Anwendung von Krümmungsinformation

Je nach Anwendungsziel ist zu entscheiden, ob die Krümmungsinformation bei der eigentlichen Visualisierung oder zur Untersuchung der Daten eingesetzt werden soll. Krümmungsinformation ist also einerseits zur Umsetzung spezieller Darstellungstechniken erforderlich. Andererseits ermöglichen die approximierten Krümmungsinformationen auch die Durchführung zusätzlicher Analyse- und Bewertungsmethoden für diskrete Daten.

2.5.1 Darstellung

Approximierte Krümmungsinformation kann zur Umsetzung von Techniken zur illustrativen bzw. nicht-photorealistischen Darstellung eingesetzt werden. Die Beurteilung einer Darstellung kann durch die Bewertung von Effektivität und Expressivität der Darstellung erfolgen. In [SCHUMANN und MÜLLER, 2002] werden folgende Definition für diese Gütekriterien vorgeschlagen:

- Expressivität: unverfälschte Wiedergabe der Daten
- Effektivität: optimale Ausnutzung der Fähigkeiten des Betrachters und Eigenschaften des Ausgabekontextes

Der Grund für den Einsatz illustrativer Darstellungstechniken ist der Versuch, anhand illustrativer Verfremdungen bzw. nicht-photorealistischer Effekten expressivere und effektivere Abbildungen zu erzeugen. Durch Liniengrafiken lässt sich zum einen die expressivere aber auch effizientere Darstellung einer Oberfläche erzeugen. Zu einer Verbesserung der Expressivität kommt es, wenn Liniengrafiken integriert werden, durch die bisher nicht sichtbare Oberflächeneigenschaften erkennbar werden. Effizientere Darstellungen von Oberflächen hingegen sind durch die reduzierte aber ausreichende Beschreibung von Oberflächeneigenschaften durch Liniengrafiken gekennzeichnet. In diesem Fall resultiert eine bessere Ausnutzung des Ausgabegerätes durch die Beschreibung einer Oberfläche durch einzelne Linien und/oder Liniemuster. Der dadurch auftretende Informationsverlust entspricht der Differenz zwischen dem wahrgenommenen und tatsächlichen überdeckten Oberflächenbereich. Dass sich Liniengrafiken zur korrekten bzw. ausreichenden Beschreibung von Oberflächen eignen, zeigen unter anderem die Arbeiten von [SOUSA und PRUSINKIEWICZ, 2003; FRANCIS, 1987]. Generell werden folgende Linientypen unterschieden [STROTHOTTE und SCHLECHTWEG, 2002]:

- Merkmalslinien: Kennzeichnung von Furchen und Kanten auf Oberflächen
- Silhouetten: sichtabhängige Kanten, d.h. Trennung von *frontfacing* und *backfacing* Oberflächenbereichen (weiterhin ist noch die Unterscheidung zwischen Silhouettenkanten, die verschiedene Objekte und Teile desselben Objektes trennen, üblich)
- Schraffurlinien: orientiertes Liniemuster

Die Approximation von Krümmungsinformation auf Oberflächen kann eingesetzt werden, um mit den vorgestellten Linientypen expressivere bzw. effizientere Darstellungen für die zugrunde liegenden Oberflächenmodelle zu erzeugen.

- Merkmalslinien: Extrema bzgl. eines Hauptkrümmungswertes $\max\{|\kappa_1|, |\kappa_2|\}$ [BELYAEV et al., 1998; INTERRANTE et al., 1996]
- Schraffurlinien: Parametrisierung einer Oberfläche durch Hauptkrümmungsrichtungen [HERTZMANN und ZORIN, 2000; GIRSHICK et al., 2000]

- Silhouetten: Kontrolle der Silhouettenbreite [KINDLMANN, 2003]

Eine weitere Anwendung von Krümmungsinformation zur illustrativen Darstellung von Oberflächen ist deren Beschreibung durch ein krümmungsabhängiges Beleuchtungsmodell [STROTHOTTE und SCHLECHTWEG, 2002; GOOCH und GOOCH, 2001]. Es wird gezeigt, dass durch eine farbliche Trennung von krummen und glatten Oberflächenbereichen ebenfalls expressivere und effektivere Beschreibungen von Oberflächen möglich sind. Hierzu werden Illustrationen aus den Bereichen: Malerei, Architektur, Medizin sowie Maschinenbau auf die jeweils verwendete Einfärbetechnik hin untersucht. Das Ergebnis dieser Analyse ist ein Beleuchtungsmodell, das krummen bzw. glatte Bereiche durch dunkle bzw. helle Farben charakterisiert.

Einfärben

Die Zuweisung von Farbe und Opazität innerhalb von Volumendaten erfolgt durch die Angabe einer Transferfunktion. Die durch die Transferfunktion beschriebene Abbildung der Volumendaten kann unter anderem anhand des gegebenen Volumenwertes bzw. abgeleiteter Größen wie z.B. Gradient, Krümmungsinformation erfolgen. Die Dimensionalität einer Transferfunktion entspricht der Anzahl notwendiger Werte zur Bestimmung von Farbe bzw. Opazität.

In der von [HLADUVKA, 2001] vorgestellten krümmungsbasierten Darstellungstechnik von Volumendaten wird Krümmungsinformation zur Hervorhebung von Oberflächenbereichen geometrischer Modelle eingesetzt. Für die verwendeten Volumenmodelle geometrischer Objekte werden Farbe und Opazität eines Oberflächenpunktes in Abhängigkeit von den beiden auftretenden Hauptkrümmungen bestimmt, d.h. durch eine wie in Abb. 2.10 beschriebene Transferfunktion. Durch den Einsatz von zwei 2-dimensionalen Transferfunktionen, d.h. für Farbe und Opazität, sind dann unterschiedlich farbliche bzw. transparente Beschreibungen von Oberflächenbereichen möglich (Abb. 2.9).

Eine weitere Technik zur Einfärbung von Volumendaten anhand approximierter Krümmungsinformationen wird in [KINDLMANN, 2003] vorgestellt. Zur Bildgenerierung ist ebenfalls die Angabe von zwei Transferfunktionen erforderlich. Die eingesetzten Transferfunktionen entsprechen einer 1-dimensionalen Opazitäts- sowie einer 2-dimensionalen Farbzuordnung. Durch das Setzen des Opazitätswertes für ein Werteintervall erfolgt die Beschreibung bzw. Auswahl der opak darzustellenden Isofläche. Die Zuweisung der Farbe hingegen wird durch eine 2-dimensionale Transferfunktion, mit den Hauptkrümmungswerten als Achsenbezeichner, realisiert. Die von [KINDLMANN, 2003] eingesetzte Farbtransferfunktion ermöglicht eine unterschiedliche Einfärbung von konkaven und konvexen Oberflächenbereichen. Weiterhin wird eine Technik vorgestellt, gleichmäßig breite Silhouetten durch Auswertung von Krümmungsinformation innerhalb des Übergangsbereichs zwischen Vorder- und Hintergrund zu erzeugen.

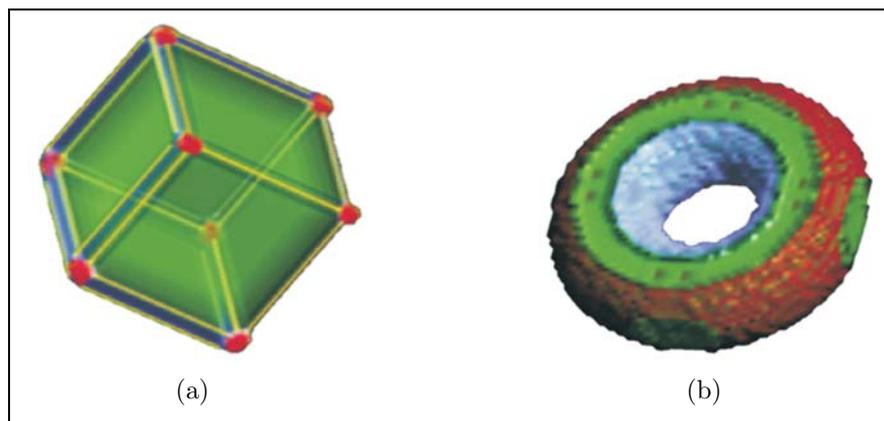


Abbildung 2.9: links: Volumerendering eines Würfels mit unterschiedlicher Transparenz für Ebenen und Kanten, rechts: Volumerendering eines Torus mit unterschiedlicher Einfärbung von zylindrischen (grün), elliptischen (rot) und hyperbolischen (hellblau) Oberflächenbereichen [HLADUVKA, 2001]

Merkmalslinien

Die in [KINDLMANN, 2003] beschriebene Transferfunktion zur krümmungsbasierten Darstellung von Volumendaten kann ebenfalls zur Hervorhebung von Merkmalslinien innerhalb dieser Volumendaten eingesetzt werden (Abb. 2.11). Die Auswahl der Oberfläche erfolgt wieder über die geeignete Opazitätszuordnung. Die Charakterisierung von Merkmalslinien anhand von κ_1 und κ_2 Werten erfolgt durch die Angabe einer entsprechenden Farbabbildung der ermittelten Hauptkrümmungen (Abb. 2.10(b)).

In [INTERRANTE et al., 1996] werden Krümmungsinformationen zur Hervorhebung von Merkmalslinien innerhalb von Volumendaten eingesetzt. Die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer Merkmalslinie beeinflusst dessen Opazitätswert, d.h. Punkte auf Merkmalslinien werden opak dargestellt. Die Zugehörigkeit wird durch den Vergleich von maximaler Hauptkrümmung κ_{max} des jeweiligen zu untersuchenden Punktes mit dem entsprechenden Wert benachbarter Punkte ermittelt. Benachbarte Punkte werden entlang der positiven und negativen κ_{max} Hauptkrümmungsrichtung bestimmt. Für jeden so ermittelten Nachbarpunkt wird die Normalenkrümmung κ_{N_i} in die gegebene κ_{max} Hauptkrümmungsrichtung berechnet. Der Vergleich dieser Normalenkrümmungen mit κ_{max} entscheidet dann über die Zugehörigkeit von P zu einer Merkmalslinie. So gilt für $\kappa_{max} > \kappa_{N_i}$ bzw. $\kappa_{max} < \kappa_{N_i}$, daß durch P eine Merkmalslinie verläuft. Die Bestimmung von Punkten auf Merkmalslinien, d.h. die Entscheidung, ob an einer Stelle P ein Extremum bzgl. von κ_{max} vorliegt, erfolgt also durch den Vergleich von Krümmungswerten an den Nachbarpunkten. In [RÖSSL et al., 2000a] wird der Einsatz von morphologischen Operatoren zur Erzeugung von Merkmalslinien auf triangulierten Oberflächenmodellen vorgeschlagen. Hierzu ist die Bestimmung eines binären Merkmalsvektors erforderlich. Die Kennzeichnung der Merkmalszugehörigkeit eines Knotens erfolgt durch den Vergleich eines skalaren

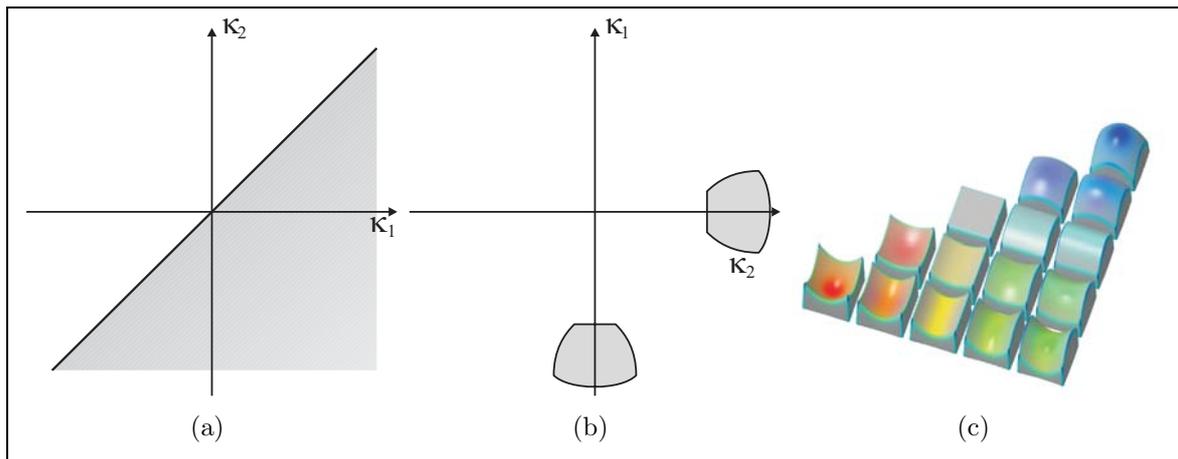


Abbildung 2.10: krümmungsabhängige Transferfunktion (a) Kennzeichnung des Bereichs auftretender Krümmungswerte, (b) Kennzeichnung der Bereiche zur Identifikation von Merkmalslinien (c) Illustration der durch die Transferfunktion beschreibbaren Oberflächeneigenschaften

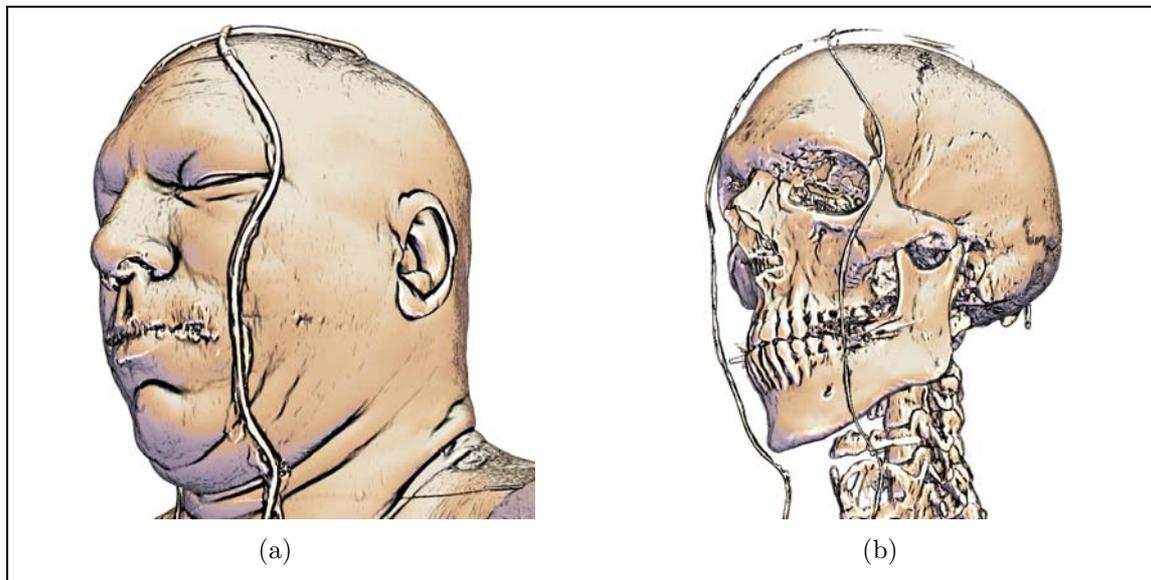


Abbildung 2.11: Kombinierte Darstellung von krümmungsabhängiger Farbzuzuweisung mit Hilfe der Transferfunktion aus Abb. 2.10 und Hervorhebung von Merkmalslinien [KINDLMANN, 2003]

Krümmungswertes mit einem Schwellwert. Die Definition von Dilation und Erosion für einen Punkt P auf der triangulierten Oberfläche erfolgt bzgl. der topologischen Nachbarschaft, d.h. bzgl. $nhd(P_i)$. Die Nacheinanderausführungen von Dilation und Erosion ermöglicht dann die Beschreibung komplexerer morphologische Operatoren auf triangulierten Oberflächen. Die Anwendung dieser Operatoren verändert die Elemente des binären Merkmalsvektors, d.h. die Merkmalszugehörigkeit der Punkte

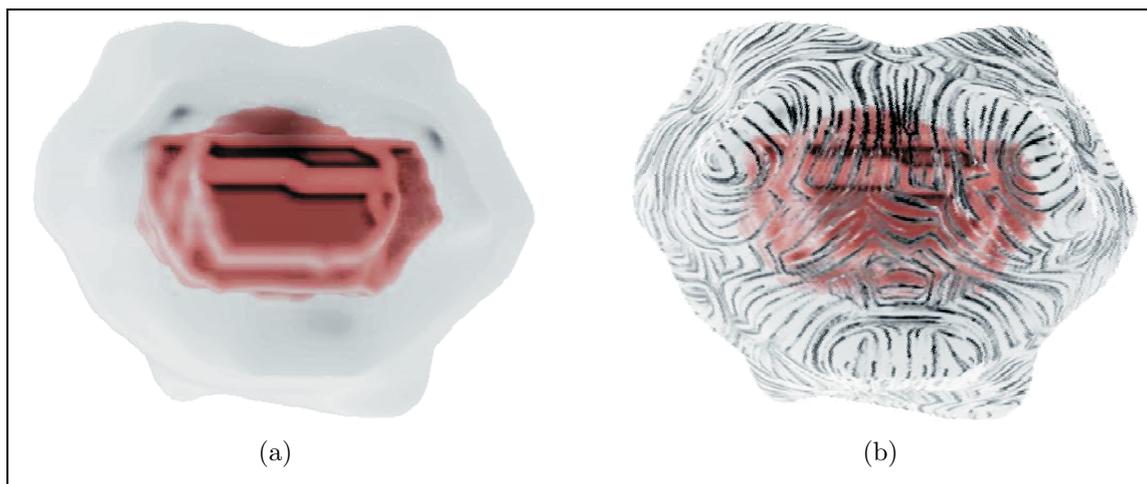


Abbildung 2.12: Merkmalslinien in Volumendaten zur Beschreibung zweier überlagernder Oberflächen, in (a) Darstellung einer opak und transparenten Oberfläche, in (b) Verwendung von Merkmalslinien zur Beschreibung transparenter Oberfläche

ändert sich. Durch eine Skelettierung ist dann die Extraktion von Merkmalslinien, d.h. eine Menge von Kanten die merkmalsrelevante Punkte verbinden, möglich.



Abbildung 2.13: Merkmalslinien auf triangulierten Oberflächen [RÖSSL et al., 2000a]

Schraffur

Die Generierung von Schraffurlinien setzt eine parametrisierte Oberfläche voraus, d.h. die Möglichkeit eine Oberflächenlinie in Oberflächenkoordinaten zu beschreiben. Für triangulierte Geometriemodelle ist demzufolge eine Parameterbeschreibung der Oberfläche zu erzeugen. Zur Schraffurgenerierung wird in [GIRSHICK et al., 2000] die Parametrisierung entlang der Hauptkrümmungsrichtungen vorgeschlagen, d.h. die Isoparameterlinien verlaufen entlang der Hauptkrümmungen.

Die Generierung von Linien entlang einer Schraffurrichtung wird in [RÖSSL et al., 2000b] beschrieben. Hierzu ist die Bestimmung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen in einem Punkt erforderlich. Anschließend wird für jeden Punkt eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen als Orientierung der

Schraffurlinie im Punkt P bestimmt. Die ausgewählte Hauptkrümmungsrichtung besitzt maximale absolute Krümmung κ_{max} , d.h. $\kappa_{max} = \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$. Anschließend werden Startpunkte von möglichen Schraffurlinien auf der Oberfläche erzeugt. Länge, Stil und Dichte der Schraffurlinien sind zum einen von der lokalen Beleuchtungssituation aber auch von der Eigenschaft der Schraffurlinie, entlang einer Silhouette zu verlaufen, abhängig.

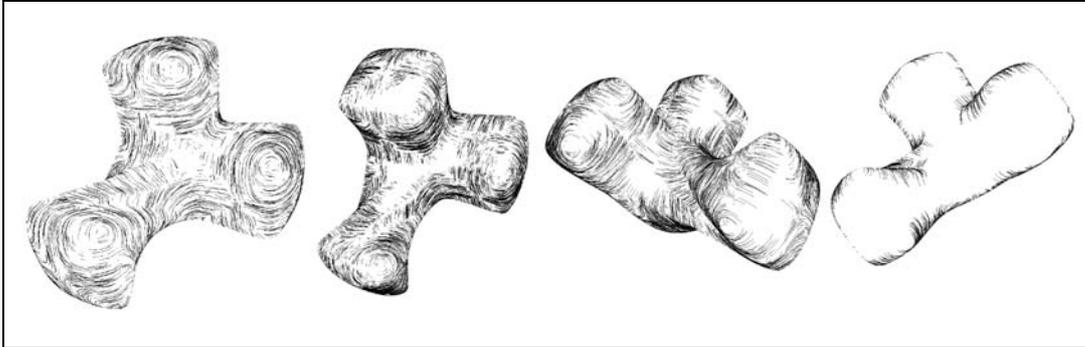


Abbildung 2.14: Künstliches Modell, Schraffur entlang der absoluten maximalen Krümmung, verschiedene Liniendichte in Abhängigkeit von Beleuchtungssituation [RÖSSL et al., 2000b]

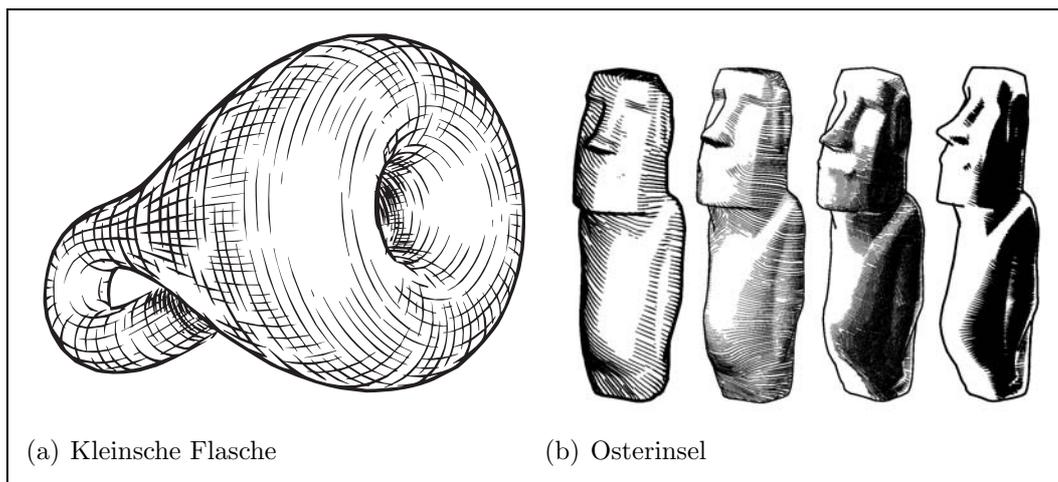


Abbildung 2.15: Schraffurmuster auf Kleinscher Flasche nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000], Anwendung des selben Verfahrens zur Orientierung der Schraffurlinien und Anpassung der Liniendichte des Schraffurmusters an Beleuchtungssituation [ZANDER et al., 2004]

Ein weiteres Verfahren zur Generierung von Schraffurlinien anhand eines *Cross Hatching* Musters auf Oberflächengittern wird in [HERTZMANN und ZORIN, 2000] vorgestellt. Als Grundlage für die Orientierung der Schraffurlinien werden folgende Liniencharakteristika gegeben:

- zylindrische Bereiche: effiziente Darstellung von zylindrische Flächen durch einzelne Hauptkrümmungslinien

- andere Bereiche: effiziente Oberflächenbeschreibung durch parallele geodätische Linien

Darauf aufbauend wird folgende Definition einer geeigneten Orientierung von Schraffurlinien gegeben: In Gebieten, in denen die Fläche parabolisch ist, entsprechen die Schraffurlinien dem Verlauf der Hauptkrümmungsrichtungen, in anderen Flächenbereichen hingegen ist ein möglichst geodätischen Verlauf der Schraffurlinien zu erzeugen. Zur Generierung der Schraffurlinien ist die Bestimmung der Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 und Hauptkrümmungsrichtungen an jedem Punkt P_i des Oberflächengitters erforderlich. Durch die beiden Hauptkrümmungsrichtungen t_{κ_1} und t_{κ_2} ist dann in jedem Punkt die Orientierung des Schraffurlinienpaares an dieser Stelle gegeben. Anschließend werden die Punkte mit pseudo-parabolischer Umgebung als zuverlässig markiert, d.h. Orientierung der Schraffurlinien in diesem Punkt bleibt unverändert, entspricht also den berechneten Hauptkrümmungsrichtungen. Die Identifikation pseudo-parabolischer Punkte erfolgt bzgl. des folgenden Kriteriums:

$$\frac{\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)}{\min(|\kappa_1|, |\kappa_2|)} > \epsilon_{\text{ratio}} \quad \text{und} \quad \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|) > \epsilon_{\text{reliable}} \quad (2.53)$$

Für nicht pseudo-parabolische Punkte hingegen wird eine Neuorientierung der Hauptkrümmungsrichtungen in Form eines Optimierungsproblems vorgenommen. Hierzu ist die Größe E in Abhängigkeit von Orientierungen nicht pseudo-parabolischen Punkten zu minimieren, d.h.:

$$E = - \sum_{e_{ij}} \cos((\theta_i - \phi_{ij}) - (\theta_j - \phi_{ji})) \quad (2.54)$$

In (2.54) bezeichnet θ_i den Winkel einer beliebigen Hauptkrümmungsrichtung im Punkt P_i zu einer Achse der Basis des Tangentialraumes T_{P_i} . ϕ_{ij} hingegen beschreibt den Winkel zwischen der Projektion von e_{ij} in T_{P_i} und derselben Achse der Basis des Tangentialraumes. Durch die Minimierung von (2.54) wird ein möglichst konstantes Feld von Orientierungen erzeugt. Für die Schraffurlinien in den nicht parabolischen Bereichen gilt dann $\kappa \approx \kappa_N$, d.h. $\kappa_G \approx 0$. Durch eine Neuorientierung der Schraffurlinien in nicht zuverlässigen Bereichen durch die Minimierung von (2.54) werden also möglichst geodätische Schraffurlinien in den nicht parabolischen Gebieten erzeugt. Ein ähnliches Verfahren zur Generierung von *Cross Hatching* Mustern auf Oberflächen wird in [PRAUN et al., 2001] eingesetzt. Die Berechnung der Orientierungen von Schraffurlinien entspricht der Methode von [HERTZMANN und ZORIN, 2000]. Die eigentliche Darstellung der Schraffurlinien aber erfolgt durch einzelne Texturstücke, die die Oberfläche vollständig überdecken [PRAUN et al., 2000]. Das Platzieren von Texturstücken auf der Oberfläche ermöglicht die Abbildung unterschiedlicher Texturen auf den selben Oberflächenbereich. Durch die Beschreibung unterschiedlich dichter Linienmuster anhand von Texturen ist die Helligkeit eines Oberflächenbereichs kontrollierbar. Mit

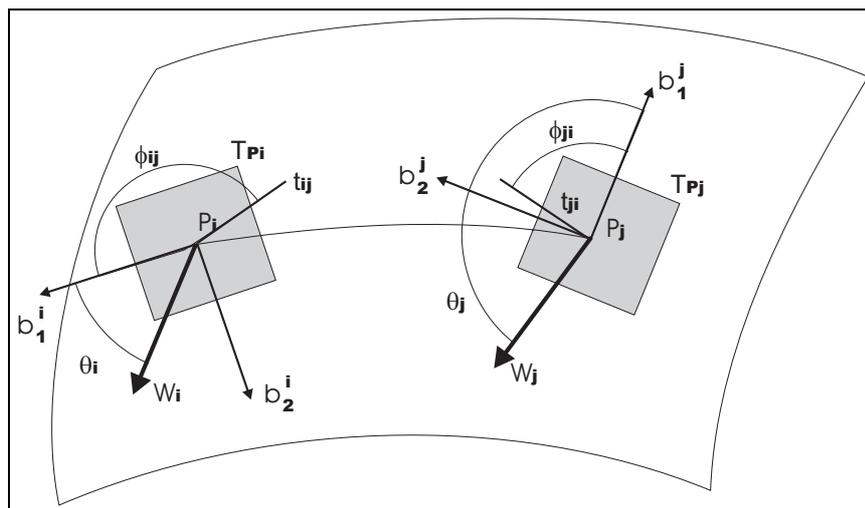


Abbildung 2.16: Illustration der Variablen des Optimierungsproblems (2.54) nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000]

Hilfe von Hardware-Unterstützung bzgl. der Texturierung von Objekten ist dann die schnelle Erzeugung von beleuchtungsabhängigen Schraffurmustern möglich. Zur Definition eines Texturstückes ist die Angabe eines Randes sowie einer Orientierung der Texturkoordinaten notwendig. Die Beschreibung des Randes erfolgt durch das manuelle Zeichnen einer geschlossenen Kurve auf der Oberfläche. Die Ausrichtung der Texturen erfolgt entlang des generierten *Cross Hatching* Orientierungsfeldes. Die geeignete Abbildung der Textur auf den zugehörigen Oberflächenbereich wird in Form eines Optimierungsproblems bestimmt.

2.5.2 Modellierung und Analyse

Die krümmungsabhängige Modellierung von Geometrien erfolgt i.a. durch die Minimierung einer globalen definierten Krümmungseigenschaft. In [WELCH und WITKIN, 1994] wird ein Verfahren zur interaktiven Deformierung von Dreiecksmodellen beschrieben. Das zu minimierende Krümmungsmaß dient zur Simulation der Verformung eines dehnbaren Materials. Die Erzeugung von Oberflächen mit bestimmten Krümmungseigenschaften kann auch zur Rekonstruktion von Daten eingesetzt werden (Abb. 2.17).

Die in [XU, 2004] gezeigten Rekonstruktions- bzw. Modellierungsmethoden erfordern neben der Beschreibung der globalen Krümmungseigenschaft zusätzlich die Angabe einer oder mehrerer Berandungskurven sowie die Angabe der Stetigkeit an Übergängen zwischen zu erzeugenden und bereits bestehender Flächenbereichen. Eine Analyse der approximierten Krümmungsinformation kann auch zur Identifikation von krümmungsrelevanten Geometrieigenschaften, z.B. Kanten, sowie dem Erkennen verrauschter Oberflächenbereiche, z.B. Spitzen, dienen. Durch eine so

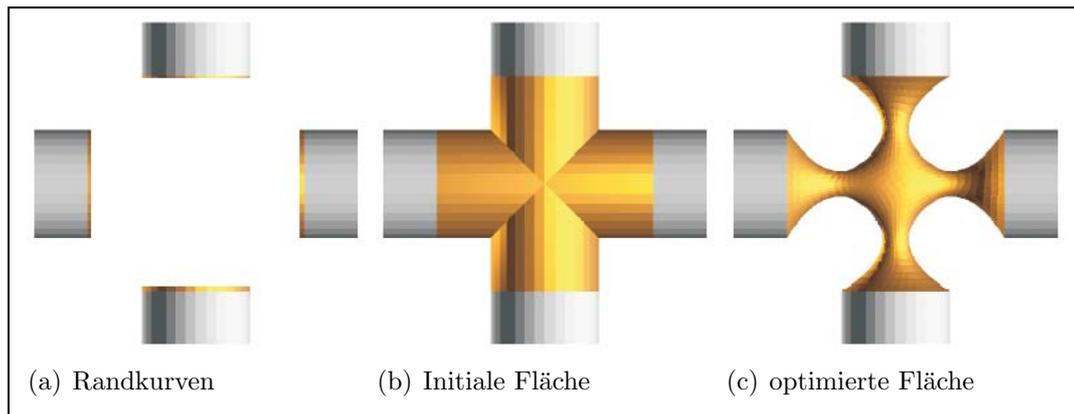


Abbildung 2.17: Rekonstruktion bzw. Erzeugung einer Flächen mit krümmungsabhängigen Eigenschaften [XU, 2004]

durchgeführte Klassifizierung von Oberflächenpunkten sind dann anisotrope Glättungen von Geometriemodellen möglich [DESBRUN et al., 1999; XU, 2004] (Abb. 2.18).

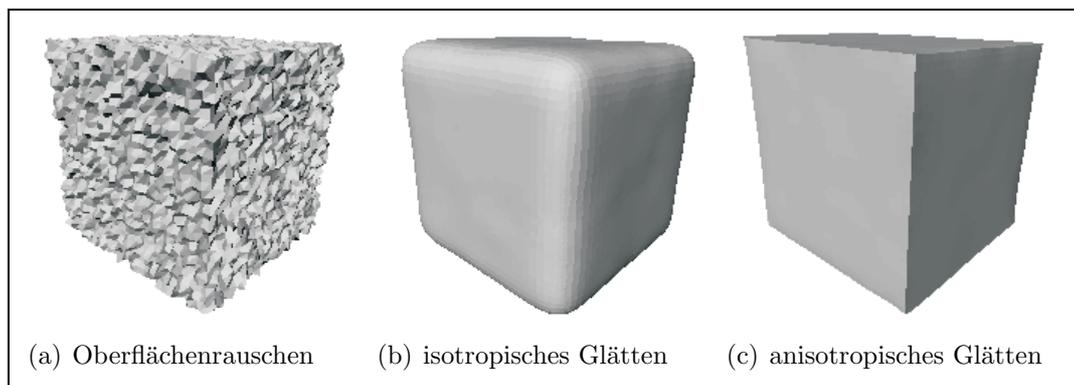


Abbildung 2.18: Glätten von Oberflächenmodellen [DESBRUN et al., 1999]

Ziel dieser Verfahren ist die Erzeugung einer unverfälschten Geometriebeschreibung bzgl. der tatsächlichen Krümmungseigenschaften auf der Basis eines verauschten Oberflächenmodells.

3 Bewertung approximierter Krümmungsinformation

Die Bewertung der Güte der approximierten Krümmungswerte für analytisch beschreibbare Flächen ist durch Vergleichen tatsächlicher und abgeschätzter Krümmungswerte möglich. Je nach Abweichung ist dann eine Beurteilung der Güte des verwendeten Verfahrens möglich. Diese Methode der Überprüfung von Krümmungsinformation wird unter anderem auf einfachen Geometrien wie z.B. dem Torus [HLADUVKA, 2001] oder auf komplexeren Oberflächen [GOLDFEATHER, 2001] angewandt. Im Fall einer Krümmungsbestimmung auf Oberflächendaten, die keine analytische Beschreibung besitzen, kann dieser Vergleich nicht mehr durchgeführt werden. Die Ermittlung einer Abweichung von einem korrekten Wert entfällt als Gütemaß zur Beurteilung der Approximierten Krümmungsinformation.

Ziel dieses Kapitels ist die Klassifizierung der zu untersuchenden Eigenschaften bei der Bewertung von approximierten Krümmungsgrößen. So kann eine Beurteilung der ermittelten Krümmungsgrößen unter anderem abhängig vom jeweils verwendeten Berechnungsverfahren oder aber anhand der eigentlich ermittelten Krümmungsgrößen erfolgen. Im ersten Fall ist zu entscheiden, welche Bedingungen bzgl. der Approximationsmethode erfüllt sein müssen, um zulässige Krümmungsinformation zu ermitteln. Bei der Auswertung der berechneten Krümmungsinformation hingegen kann zwischen der Beurteilung der ermittelten Krümmungsinformation und der Bewertung der Ergebnisse durch die Anwendung der Krümmungsinformation, d.h. die Umsetzung eines krümmungsbasierten Visualisierungs-, Modellierungs- bzw. Analyseverfahrens, unterschieden werden.

Eine weitere Methode, Aussagen bzgl. der Güte approximierter Krümmungsinformation zu treffen, ist durch den Vergleich mit ermittelten Krümmungswerten anderer Approximationsverfahren möglich.

3.1 Verfahrensabhängige Eigenschaften

Werden diskrete Geometriemodelle zur Beschreibung kontinuierlicher Geometrien eingesetzt, sind Aussagen bzgl. tatsächlicher Krümmungsgrößen anhand approximierter Krümmungsinformation nur möglich, wenn das diskrete Modell die kontinuierliche Geometrie korrekt beschreibt. Eine Bewertung, inwieweit sich kontinu-

ierliche und diskrete Geometrie unterscheiden, ist unter anderem durch Methoden der Signaltheorie möglich, z.B. Frequenzanalyse. Ergebnis einer solchen Analyse der diskreten Geometriedaten kann dann die Auswahl eines Filterungsverfahrens sein, dessen Anwendung eine geeignetere Beschreibung der kontinuierlichen Geometrie durch das diskrete Modell liefert.

Zur Bestimmung differentieller Größen für diskrete Geometriebeschreibungen ist der Einsatz von Rekonstruktionssverfahren zur Ableitungsbestimmung notwendig. Die ermittelten Ableitungsgrößen sind somit abhängig vom verwendeten Rekonstruktionsverfahren. Hierbei ist also zu entscheiden, welche Voraussetzungen innerhalb des Modells erfüllt sein müssen, um anhand des zu verwendenden Rekonstruktionsverfahren Ableitungsgrößen bestimmen zu können.

Grundlage der Approximationsverfahren sind die Krümmungsberechnungsmethoden für parametrisierte bzw. implizite Geometrien (2.11), (2.16), (2.17). Die Anwendung dieser theoretischen Verfahren auf kontinuierlichen Geometrien erfolgt unter der Annahme, dass für Punkte, an denen Krümmungsinformation bestimmt werden soll, eine 2-manifoldige Umgebung existiert, die diesen Punkt im Inneren enthält. Diese Umgebungen sind dadurch gekennzeichnet, dass eine homöomorphe bzw. topologieerhaltende Abbildung dieser Umgebung auf eine Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 möglich ist [ANDERSON, 1997]. Somit muss vor der eigentlichen Krümmungsberechnung entschieden werden, ob für einen Punkt eine solche Umgebung existiert und demzufolge Krümmungsinformation bestimmt werden kann.

Im Fall der Geometriebeschreibung durch Volumendaten ist zur Identifikation nicht-2-mannigfaltiger Punktumgebungen die Erzeugung bzw. Angabe einer topologischen Zusammenhangsinformation für die vorliegende Werteverteilung durch das blockstrukturierte Gitter notwendig. Die beschriebenen Verfahren verwenden unter anderem zur Bestimmung der Krümmungsgrößen an einem Punkt der Isooberfläche die Approximation des zugehörigen Gradienten. Da die Berechnung des Gradienten an allen Stellen innerhalb des blockstrukturierten Gitters möglich ist, existiert auch an jedem Isooberflächenpunkt eine eindeutig bestimmbare Tangentialebene. Somit setzen die beschriebenen Verfahren 2-manifoldige Punkte voraus.

Bei der Krümmungsapproximation auf Oberflächengittern ist hingegen die 2-Manifoldigkeit einer Punktumgebungen zu überprüfen. So enthält ein Oberflächennetz topologische Information bzgl. der enthaltenen Oberflächenpunkte P_i , d.h. es ist eine Kennzeichnung von benachbarten Punkten auf der gegebenen Oberfläche möglich. Die Entscheidung, ob für einen Punkt P_i eines Oberflächengitters eine 2-manifoldige Umgebung existiert, ist durch die Untersuchung zu P_i inzidenter Kanten und Flächen möglich.

Weiterhin kann die verfahrensabhängige Analyse auch zur Untersuchung der eingesetzte Rekonstruktionssverfahren zur Ableitungsabschätzung in Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Gitterstruktur dienen. Ergebnisse einer solchen Untersuchung sind dann Aussagen bzgl. des Einflusses der Gitterstruktur auf die Ableitun-

gapproximation. Hierzu ist die Beschreibung desselben Modells durch verschiedene Gitterstrukturen erforderlich, z.B. unterschiedliche Triangulierungen oder unregelmäßige Gitter.

3.1.1 Eigenschaften der Krümmungsapproximation auf Oberflächen

Zur Approximation von Krümmungsinformation an einem Punkt P durch *Surface Fitting* Techniken ist die Auswahl einer geeigneten Passfläche notwendig. Anhand dieser Passflächenbeschreibung werden dann die Elemente der Weingartenmatrix bestimmt. Somit ist eine Bewertung der Weingartenmatrix (2.12) bzw. deren Elemente durch die verwendete Passfläche möglich. Die Eignung einer Passfläche ist von topologischen und geometrischen Eigenschaften zur Beschreibung von $nhd(P_i)$ abhängig. Der Vergleich dieser Eigenschaften kann zwischen $nhd(P_i)$ und der verwendeten Parametrisierung, d.h. $\overline{nhd(P_i)}$, bzw. der erzeugten Passfläche durchgeführt werden.

So ist eine korrekte topologische Beschreibung von Punkten aus $nhd(P_i)$ durch den Erhalt von Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den entsprechenden Knoten, Kanten und Flächen gekennzeichnet. Hierzu ist eine korrekte Umgebungsbeschreibung von P_i durch $nhd(P_i)$ erforderlich. So zeigt Abb. 2.6(a), dass durch die Auswahl von Elementen anhand einer euklidischen Metrik eine korrekte Rekonstruktion der Zusammenhangsinformation in Form von $nhd(P_i)$ nicht garantiert werden kann.

Zur Überprüfung des Erhalts von topologischen Eigenschaften durch eine Parametrisierung sind Lagebeziehungen, d.h. Nachbarschaften von entsprechenden Elementen, d.h. von Knoten, Kanten und Flächen, aus $nhd(P_i)$ und $\overline{nhd(P_i)}$ zu untersuchen. Die Analyse topologischer Eigenschaften der Gitterstruktur auf der Passfläche hingegen, setzt die Übertragung der Zusammenhangsinformation auf die Passfläche voraus. Anschließend sind dann die Lagebeziehungen zwischen den abgebildeten Gitterelementen auf der Passfläche zu bestimmen. Wird eine homöomorphe Abbildung der Parametrisierung, d.h. von $\overline{nhd(P_i)}$ zur Erzeugung einer Passfläche verwendet, bleiben die topologischen Eigenschaften der Parametrisierung erhalten. In diesem Fall ist die Überprüfung, d.h. der Erhalt, der topologischen Eigenschaften bzgl. der Parametrisierung ausreichend, da durch eine homöomorphe Abbildung der Erhalt topologischer Beziehungen garantiert wird.

Die beschriebenen Parametrisierungsverfahren nach [GOLDFEATHER, 2001; ECK et al., 1995] setzen ein 2-manigfaltige Umgebung $nhd(P_i)$ voraus. In diesem Fall ist also die Existenz einer homöomorphen Abbildung von $nhd(P_i)$ auf eine Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 Voraussetzung, um die Verfahren anwenden zu können. In Abb. 3.1 erfolgt eine Gegenüberstellung einer nicht-2-manigfaltigen und 2-manigfaltigen Umgebung. Somit ist für die Anwendung der Parametrisierungen ebenfalls die 2-Manigfaltigkeit der gegebenen Umgebungsbeschreibung $nhd(P_i)$ zu überprüfen.

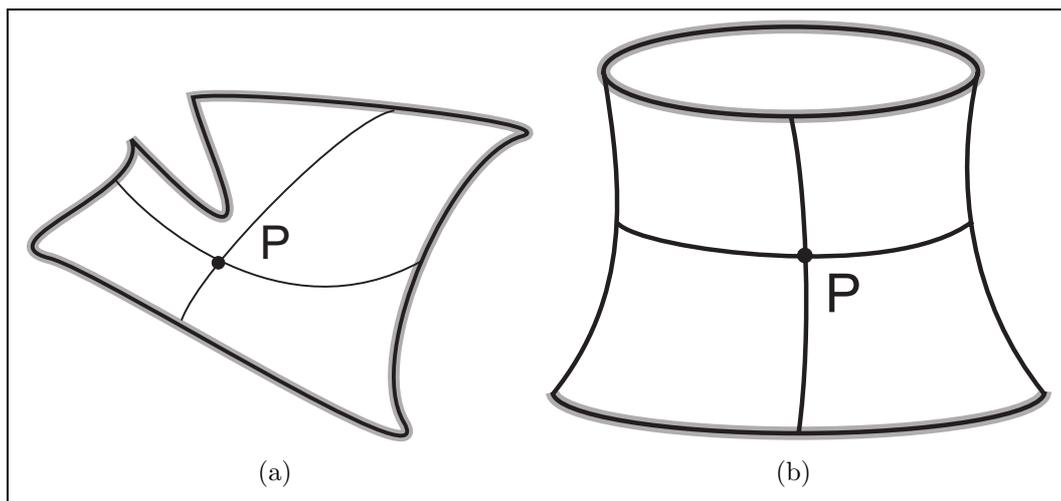


Abbildung 3.1: Beschreibung von Punktumgebung mit Kennzeichnung der Randkurve durch graue Farbhinterlegung, für die in (a) gezeigte Nachbarschaft existiert eine homöomorphe Abbildung zur Kreisscheibe, in (b) ist eine homöomorphe Abbildung auf eine Kreisscheibe nicht möglich da die Umgebung durch 2 Randkurven begrenzt wird

Die Bewertung der geometrischen Eigenschaften einer Parametrisierung bzw. einer Passfläche setzt hingegen die Angabe einer Metrik voraus. Diese Methode entspricht der Bestimmung eines Unterschieds für $\overline{nhd}(P_i)$ bzw. für die Passfläche bzgl. eines durch die Metrik erfassten Abweichungskriteriums. Eine solche Bewertung kann unter anderem durch eine Berechnung der Abweichung zwischen ermittelter Passfläche und optimaler Passfläche erfolgen. Eine so durchgeführte Analyse dient somit zur Bestimmung, inwieweit die Passfläche ein gefordertes Optimierungskriterium erfüllt. Eine weitere Anwendung von Metriken kann zur Beurteilung von Abbildungseigenschaften verwendet werden, um z.B. Aussagen bzgl. der Isometrie oder Konformität einer Abbildung zu treffen. Für die Bestimmung von Krümmungsinformation ist eine solche Untersuchung der Abbildungseigenschaften nicht erforderlich, da es sich bei Krümmungswerten um parameterinvariante Größen handelt [STRUBECKER, 1969], d.h. für unterschiedliche Parametrisierungen einer Oberfläche sind die Krümmungswerte identisch.

Die Auswahl einer Passfläche anhand eines *Least Squares* Problems, entspricht der Suche nach einer Passfläche mit minimalen quadratischen Abstand bzgl. der gegebenen Punkte. Das verwendete Optimierungskriterium, die Minimierung der quadratischen Abstände, kann als Metrik verwendet werden. In diesem Fall entspricht also das Gütemaß bzgl. des *Surface Fitting* Kriteriums dem auftretenden quadratischen Abstand zwischen Original- und entsprechenden Passflächenpunkten. Im Fall der Erzeugung einer Passfläche nach (2.25) werden auch die quadratischen Unterschiede zwischen Normalen bei der Berechnung der Abweichung mit einbezogen. Durch eine solche Untersuchung ist somit eine

Kennzeichnung bzw. Gütebestimmung von Flächen bzgl. der Punkte aus $nhd(P_i)$ möglich.

Die Parametrisierung von $nhd(P_i)$ durch eine Projektion [GOLDFEATHER, 2001] erfolgt ohne Beachtung der gegebenen Zusammenhangsinformationen. Somit ist in diesem Fall eine Überprüfung einer kreuzungsfreien Abbildung, d.h. einer Isomorphie von $nhd(P_i)$ und $\overline{nhd(P_i)}$, notwendig. Zur Beurteilung ob $nhd(P_i)$ und $\overline{nhd(P_i)}$ isomorphe Graphen sind, ist somit der Erhalt von Nachbarschaftsinformation zwischen entsprechenden Elementen beider Graphen zu überprüfen.

Eine andere Variante die topologische Korrektheit einer projektiven Parametrisierung [GOLDFEATHER, 2001] zu garantieren, ist durch den Vergleich des Winkels zwischen Normale an einem zu projizierenden Punkt $N(P_j)$ mit $P_j \in nhd(P_i)$ und Ebenennormale bzw. Projektionsrichtung $N(P_i)$ möglich. So gilt, dass für $\alpha(N(P_j), N(P_i)) > \frac{\pi}{2}$, eine topologieerhaltende Parametrisierung von $nhd(P_i)$ durch $\overline{nhd(P_i)}$ nicht garantiert werden kann. Innerhalb lokaler Koordianten sind die Normalen an kritischen Punkte durch eine negative z-Komponente gekennzeichnet.

Durch die Approximation geodätischer Polarkoordinaten nach [WELCH und WITKIN, 1994] für $nhd(P_i) = \overline{star(P_i)}$ hingegen ist eine kreuzungsfreie Abbildung von $nhd(P_i)$ bzw. $star(P_i)$ auf $\overline{nhd(P_i)}$ garantiert. Diese Art der Parametrisierung liefert somit immer korrekte Nachbarschaftbeschreibungen innerhalb der Parameterebene.

Auch das Verfahren der Generierung einer topologieerhaltenden Abbildung von $nhd(P_i)$ nach [ECK et al., 1995] liefert i.a. eine isomorphe Abbildung von $nhd(P_i)$ auf $\overline{nhd(P_i)}$. Die Isomorphie einer solchen Abbildung ist abhängig von dem verwendeten Verfahren zur Bestimmung des Skalierungsfaktors $\rho_{j,k}$. Im Falle $\rho_{j,k} = 1$ bleiben topologische Eigenschaften erhalten. Wird hingegen eine andere Skalierung, d.h. $\rho_{j,k} \neq 1$ bevorzugt, ist die Isomorphie $nhd(P_i)$ auf $\overline{nhd(P_i)}$ nicht garantiert. In [ECK et al., 1995] werden andere Werte für ρ verwendet mit dem Ziel einer möglichst konformen Abbildung von $nhd(P_i)$ in die Parameterebene. So wird in [ECK et al., 1995] darauf hingewiesen, dass in 0.003 % der generierten planaren Beschreibungen mit $\rho_{j,k} \neq 1$ durch die Approximation einer topologischen korrekten Parametrisierung von $nhd(P_i)$ keine Isomorphie auftrat. Da Krümmungsgrößen parameterinvariante Werte sind, kann die Bestimmung einer Parametrisierung mit $\rho_{j,k} = 1$ durchgeführt und zur Generierung von Passflächen eingesetzt werden.

Zur Bewertung von approximierter Krümmungsinformation auf Oberflächenmodellen durch *Curve Fitting* Techniken hingegen ist einerseits eine Untersuchung der verwendeten Approximation der Normalenkrümmungen erforderlich. Andererseits ist aber auch die Beurteilung der Elemente der Weingartenmatrix möglich. Hierzu kann die Eignung der Weingartenmatrix bzgl. der approximierten Normalenkrümmungen in die entsprechenden Richtung überprüft werden. Für die Ermittlung der Normalenkrümmung für eine inzidente Kante an einen Punkt P_i ist wiederum deren Projektion in die Tangentialebene von P_i erforderlich. Hierzu ist wiederum zu

überprüfen, ob durch die Projektion eine geeignete Beschreibung des Kurvenverlaufs innerhalb der Tangentialebene erfolgt. In den vorgestellten Verfahren [TAUBIN, 1995; BARR et al., 2002; GOLDFEATHER, 2001] wird die Abschätzung von κ_N einer Flächenkurve in Richtung $P_i P_j$ anhand eines Kreises approximiert. Somit ist ein Maß für die Güte der so durchgeführten Abschätzung der Normalenkrümmung, eine Metrik, die die Abweichung des tatsächlichen und dem durch den verwendeten Kreis beschriebenen Kurvenverlaufs erfasst. Zur Abschätzung dieser Abweichung kann unter anderem die Differenz von Flächeninhalten von Kreisabschnitt und Dreieck aus Abb. 2.7 eingesetzt werden. Die Erzeugung der Elemente der Weingartenmatrix durch ein *Least Squares* Verfahren, liefert somit Elemente für die die quadratische Abweichung zwischen bestimmbarer und approximierter Normalenkrümmung in die entsprechende Richtung minimiert wird. Diese Abweichung kann somit auch zur Beurteilung Weingartenmatrix verwendet werden. Dies entspricht dann einer Gütebestimmung der verwendeten Weingartenmatrix bzgl. der approximierten Normalenkrümmungen.

3.1.2 Eigenschaften der Krümmungsapproximation innerhalb von Volumendaten

Für die Bewertung einer Filterfunktion h_{3D} zur Rekonstruktion von Werten bzw. n ter Ableitungen eines Volumensignals werden unter anderem Untersuchungen der Filterfunktion im Orts- und Frequenzraum vorgeschlagen [MÖLLER et al., 1997; MARSCHNER und LOBB, 1994; BENTUM et al., 1996]. Die Beschreibung der Verfahren zur Beurteilung von 3D-Filterfunktionen in [MÖLLER et al., 1997; BENTUM et al., 1996] erfolgt bzgl. separierbarer Filter h_{3D} . So werden Gütemaße anhand der einzelnen Tensorproduktfunktionen, d.h. von 1D-Filtern, definiert. In [BENTUM et al., 1996] wird gezeigt, dass durch eine Filterung mit der n ten Ableitung des *sinc* Filters, sinc^n , eine ideale n te Ableitungsrekonstruktion möglich ist. Als ein Maß für die Güte einer Filterfunktion h wird dann die Abweichung zwischen der verwendeten h und der entsprechenden sinc^n Funktion im Frequenzraum untersucht. In [MÖLLER et al., 1997] werden Gütekriterien für Filterfunktionen im Ortsraum gegeben. Für die vorgestellte Untersuchung wird die Abtastung eines kontinuierlichen Signals $f(t)$ durch N Abtastwerte $f_k, 0 \leq k \leq N$ vorausgesetzt. Zur Beschreibung des rekonstruierbaren Wertes $f_r^h(t)$ an der Stelle t durch eine Filterung mit h wird folgende Formel anhand der Definition einer Konvolution hergeleitet

$$f_r^h(t) \approx \sum_{i=0}^N a_i^h(\tau(t)) f^{(i)}(t) + r_N^w(\tau(t)) \quad (3.1)$$

Die Koeffizienten $a_i^h(\tau(t))$ aus (3.1) sind filterabhängige Größen und können zur Definition von Filterkriterien eingesetzt werden. So wird in [MÖLLER et al., 1997]

zur Charakterisierung eines brauchbaren n ten Ableitungsfilters die Abweichung von $a_n^h(\tau(t)) = 1$ unter der Bedingung das $r_N^w(\tau(t)) = 0$ sowie $a_i^h(\tau(t)) = 0, i \neq n$ gilt. In [MARSCHNER und LOBB, 1994] hingegen erfolgt die Definition von 3D-Filtermetriken bzgl. eines 3D-Frequenzraumes. Es werden drei Metriken zur Erfassung des durch die Filterung entstehenden *Aliasing*, *Smoothing* sowie *Ringing* Effekts gegeben. Ergebnis der beschriebenen Filteranalyse-Ansätze ist die Empfehlung zur Ableitungsapproximation durch die Faltung mit einem *BC-Cubic-Spline* Filter. Die Untersuchungen und Bewertung von Filtern aus [MÖLLER et al., 1997; MARSCHNER und LOBB, 1994; BENTUM et al., 1996] zeigen auch, dass Zentrale Differenzen, Trilineare Interpolation sowie Gauß- und gefensterter *sinc*^(n) Filter hingegen nur eingeschränkt zur Rekonstruktion von Werten bzw. n ter Ableitungen einsetzbar sind.

3.2 Ergebnisabhängige Eigenschaften

Die Bewertung der approximierten Krümmungsgrößen kann qualitativ und quantitativ erfolgen. Die qualitative Beurteilung setzt die Anwendung einer krümmungsbasierten Darstellungstechnik voraus. Anhand der generierten Darstellung sind dann einerseits Aussagen bzgl. der Güte der approximierten Krümmungsinformation möglich. Andererseits kann aber auch die eigentliche Darstellungstechnik bewertet werden. Die quantitative Analyse ermittelter Krümmungsgrößen hingegen ist gekennzeichnet durch die Bestimmung von krümmungsabhängigen Größen, die zur Erfassung einer messbaren Krümmungseigenschaft dienen. Eine Beurteilung der Güte der Krümmungswerte kann dann durch den Vergleich dieser Größen erfolgen. Verfahren zur Approximation von Krümmungsgrößen liefern skalare und vektorielle Werte für einen Oberflächenpunkt. Da sich die Anforderungen an diese beiden Wertetypen unterscheiden, erfolgt eine Trennung in die Beurteilung skalarer und vektorieller Werte. Anschließend wird noch auf die qualitative Bewertung von krümmungsbasierten Darstellungstechniken eingegangen.

3.2.1 Skalare Krümmungswerte

Durch skalare Krümmungswerte können geometrische Eigenschaften an einem Punkt P_i überprüft werden. So ist unter anderem eine Identifikation von Kanten und Furchen auf einer Oberfläche durch die Analyse dieser Werte möglich. Die Identifikation dieser Punkte erfolgt durch Bestimmung auffälliger lokaler Änderungen von skalaren Krümmungswerten. So sind homogene Bereiche durch eine konstante bzw. kontinuierliche Verteilung der Krümmungswerte gekennzeichnet. Innerhalb dieser Bereiche treten keine Kanten und Furchen auf. Somit ist eine Beurteilung der skalaren Krümmungsgüte anhand ihrer Verteilung auf der Oberfläche durchführbar. So kann innerhalb homogener Bereiche von einer konstanten bzw. kontinuierlichen Ver-

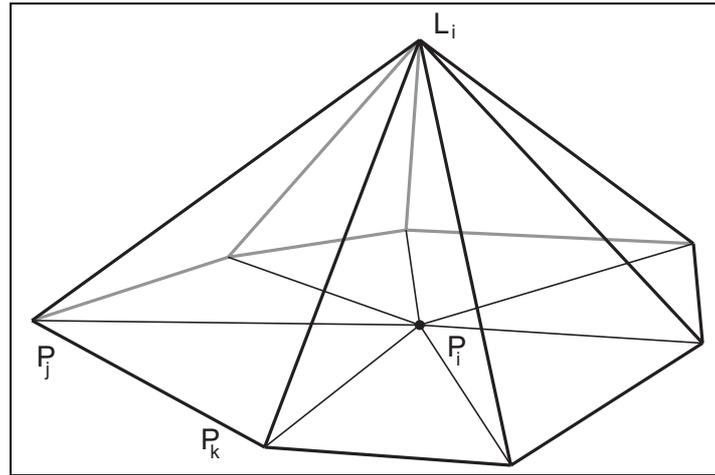


Abbildung 3.2: Lagrange-Polynomial L_i für einen Flächenpunkt P_i

teilung ausgegangen werden. Im Gegensatz zu Bereichen wo Kanten oder Furchen auftreten, die durch eine nicht-konstante Verteilung von Krümmungswerten gekennzeichnet sind. Diese Analyse einer Verteilung setzt die Berechnung und Ableitung der zu untersuchenden Krümmungsgröße an jedem Oberflächenpunkt voraus. Dies ist durch die Definition eines Skalarfeldes auf der Oberfläche möglich. Die Definition eines solchen Feldes kann in Form von (2.18) erfolgen, d.h. eine Beschreibung, in welcher Form der entsprechende Krümmungswerte an einer beliebigen Stelle P auf der triangulierten Oberfläche rekonstruiert werden kann, wobei gilt, dass der entsprechende Krümmungswert in P_i interpoliert wird. Ein Maß für die Stetigkeit einer so definierten Funktion ist durch die Bestimmung der Größe bzw. Länge des Gradienten $\nabla w(P)$ möglich. In [POLTHIER, 2002] erfolgt die Definition von Skalarfeldern auf triangulierten Oberflächen durch:

$$w(P) = \sum w_i L_i(P) \quad (3.2)$$

In (3.2) ist durch L_i eine lineare Lagrange - Basis - Funktion bezeichnet (Abb. 3.2). Durch w_i wird der skalare Krümmungswert erfasst, für den durch (3.2) eine Verteilung erfolgt, d.h. w_i an P_i entspricht einer Größen: κ_1, κ_2, H, K . Anhand der Beschreibung einer Werteverteilung durch (3.2) erfolgt eine Interpolation der skalaren Krümmungswerte, da $L_i(P_j) = \delta_{ij}$ gilt. Die Bestimmung des Gradienten des durch (3.2) beschriebenen Skalarfeldes an einer beliebigen Oberflächenposition P ist durch:

$$\nabla w(P) = \sum w_i \nabla L_i(P) \quad (3.3)$$

gegeben. Im Fall linearer Lagrange-Basis-Funktionen tritt keine Gradientenänderung innerhalb eines Dreiecks auf, d.h. die Lokalisation eines Punktes P innerhalb eines Dreiecks T reicht aus, um den zugehörigen Gradienten $\nabla w(P)$ zu bestimmen.

Somit kann für (3.3) auch folgende dreiecksabhängige Form $\nabla w(P)_T$ gegeben werden:

$$\nabla w(P)_T = \sum \frac{1}{A(T_{P_i, P_j, P_k})} \kappa_i J c_i \quad (3.4)$$

In (3.4) ist durch c_i die gegenüberliegende Seite des Punktes P_i bezeichnet. Durch J wird ein Operator gekennzeichnet, der die Dreieckseite c_i um $\pi/2$ ins Innere des Dreiecks rotiert. Wird eine Beschreibung des Skalarfeldes, d.h. die Verteilung einer skalaren Krümmungsgröße in Form von (3.2) angenommen, kann die Stetigkeit anhand der Länge des Gradienten aus (3.4) bestimmt werden. Durch die Untersuchung der Verteilung eines skalaren Krümmungswertes anhand von Gradienteninformation ist neben der Überprüfung einer stetigen Verteilung auch die Lokalisation von Dreiecken an Oberflächenkanten möglich. Hierzu kann die Gradienteninformation für $\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$ genutzt werden.

Liegen hingegen Informationen bzgl. der zu erwartenden lokalen bzw. globalen Krümmungseigenschaften der zu untersuchenden Geometrie vor, so bietet sich deren Überprüfung anhand der approximierten Krümmungswerte an. Die Bewertung von krümmungsabhängigen Eigenschaften wird unter anderem in [HERZMANN und ZORIN, 2000] zur Auswahl zuverlässiger Punkte oder in [RÖSSL et al., 2000a] zur Klassifizierung von Punkten auf Merkmalslinien eingesetzt. Auch in [HLADUVKA, 2001] werden Krümmungsinformationen zur Darstellung geometrischer Eigenschaften genutzt (Abb. 2.9). Geometrische Eigenschaften der Fläche im Punkt P werden anhand der ermittelten Krümmungsinformation bestimmt, d.h. es ist die Formulierung einer Eigenschaft $prop(P_i)$ bzw. $prop(nhd(P_i))$ in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Krümmungsinformation, d.h. z.B. von: $\kappa_1, \kappa_2, H, K, t_{kappa1}, t_{\kappa_2}$, notwendig. Die Auswertung von $prop$ liefert 1 für alle Punkte P_i , die das Eigenschaftskriterium erfüllen. Unter anderem können folgende Eigenschaftskriterien für Oberflächenpunkte eingesetzt werden (Abb. 2.3):

- elliptisch:

$$- prop_{plane} = \begin{cases} \kappa_1 \approx 0, \kappa_2 \approx 0 & 1 \\ \text{sonst} & 0 \end{cases}$$

$$- prop_{spherical} = \begin{cases} \kappa_1 \approx \kappa_2 \wedge \kappa_1 \neq 0 \wedge \kappa_2 \neq 0 & 1 \\ \text{sonst} & 0 \end{cases}$$

- zylindrisch:

$$- prop_{cylindric} = \begin{cases} \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|) > 0 \wedge \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|) \approx 0 & 1 \\ \text{sonst} & 0 \end{cases}$$

- hyperbolisch:

$$- prop_{hyperbolic} = \begin{cases} \max(\kappa_1, \kappa_2) > 0 \wedge \min(\kappa_1, \kappa_2) < 0 & 1 \\ \text{sonst} & 0 \end{cases}$$

Durch $prop(P_i)$ ist dann eine Klassifizierung der Punkte P_i bzgl. der Eigenschaften möglich, d.h. die Angabe einer Menge X von Oberflächenpunkten P_i , für die gilt $X = \{P_i \mid prop(P_i) = 1\}$. Die Abschätzung, inwieweit P_i das untersuchte Eigenschaftskriterium erfüllt, erfordert die Angabe eines oder mehrerer Vergleichswerte ϵ zur Abschätzung des \approx Operators. So wird in [HERTZMANN und ZORIN, 2000] zur Identifikation parabolischer Punkte, d.h. zur Bestimmung von $prop_{cylindric}(P_i) = 1$, (2.53) mit ϵ_{ratio} und $\epsilon_{reliable}$ zur Bewertung vorgeschlagen. Durch die Auswahl zu erkennender Punkte für $prop(P_i) = 1$ sowie die Angabe von Referenzwerten für die ϵ -Werte sind dann Aussagen bzgl. Korrektheit einer Krümmungsapproximation möglich. So sind aufgrund der Abweichung der notwendigen ϵ -Werte zur Identifikation aller erforderlichen Punkte von zu erwartenden ϵ -Werte Beurteilungen der Güte der Krümmungsinformation möglich. Bei der Auswahl der Referenzwerte ist also vorab eine Abschätzung der Krümmungswerte auf der Oberfläche notwendig.

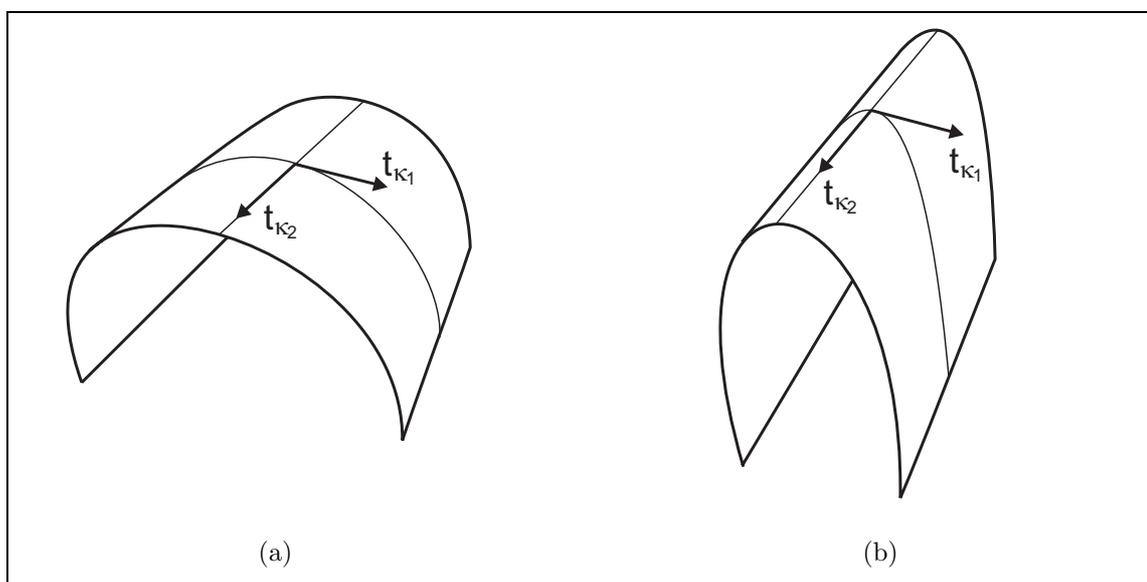


Abbildung 3.3: 2 unterschiedliche zylindrische Umgebung in (a) ist der zu erwartende Quotient zur Berechnung von $prop_{cylindric}$ kleiner als in (b), da in (a) eine größerer Wert von $\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$ auftritt

Durch eine solche Klassifizierung bzw. Einteilung der Punkte in deren Zugehörigkeit zu einer Eigenschaftsmenge X bzw. Y ist ein weiteres Kriterium der Güte einer Krümmungsapproximation durch die Disjunktheit dieser Eigenschaftsmengen gegeben. So liegt im Fall von $X \cap Y = \emptyset$ eine eindeutige Beschreibung der Punkte P_i bzgl. der durch X und Y erfassten Eigenschaften vor.

3.2.2 Vektorielle Krümmungswerte

Für die Generierung von Schraffurmustern auf Oberflächen ist die Definition eines tangentialen Vektorfeldes $w(P) = t \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Oberfläche erforderlich,

d.h. folgendes Skalarprodukt gilt: $w(P)N(P) = 0$. Die Beschreibung von Linien auf Oberflächen entlang eines Richtungsfeldes auf einer Oberfläche erfolgt durch die Erzeugung von Flächenkurven C für die gilt: $\dot{C}(P) = w(P)$. Diese Kurven verlaufen somit tangential zur Oberfläche, d.h. es gilt das folgende Skalarprodukt $\dot{C}(P)N(P) = 0$. Für die Bewertung des resultierenden Schraffurmusters anhand bestimmter Orientierungen für P_i ist somit die Definition eines tangentialen Vektorfeldes $w(P)$ auf der Oberfläche erforderlich. Weiterhin ist die Auswahl eines Verfahrens zur Generierung von Stromlinien innerhalb dieses tangentialen Vektorfeldes notwendig, d.h. ein Verfahren zur Erzeugung von Flächenkurven C für die gilt $\dot{C}(P) = w(P)$.

In [GIRSHICK et al., 2000] wird eine Orientierung der Schraffurlinien entlang der Hauptkrümmungsrichtungen vorgeschlagen. Hauptkrümmungslinien sind Flächenkurven C für die gilt: $\dot{C} = t_{\kappa_1}$ bzw. $\dot{C} = t_{\kappa_2}$. Für ein (u, v) -Kurvennetz, das eine Fläche entlang der Hauptkrümmungsrichtungen durchsetzt, gilt: $M = 0$ und $F = 0$ [SCHOENE, 1975]. Somit ist ein Maß für die Güte der approximierten Hauptkrümmungsrichtungen die Bewertung des daraus resultierenden Kurvennetzes anhand dieser Größen. Hierzu ist die Angabe eines kontinuierlichen Einheitsnormalenvektorfeldes und Bestimmung 1. und 2. Ableitung erforderlich.

Der in [HERTZMANN und ZORIN, 2000] beschriebene Ansatz zur Generierung eines Schraffurmusters hingegen ist durch die Forderung nach einem möglichst konstantem Vektorfeld gekennzeichnet. Ein solches Orientierungsfeld ist das Ergebnis des Optimierungsproblems (2.54), das zur Minimierung der Verdrehung benachbarter Orientierungen dient. Durch den Einsatz des Verfahrens von [HERTZMANN und ZORIN, 2000] ist ebenfalls die Orientierung von Texturen auf gekrümmten Oberflächen möglich [PRAUN et al., 2001]. Die Ergebnisse beider Arbeiten zeigen, dass sich eine an diesem geglätteten Feld orientierte Schraffur gut zur Beschreibung von Oberflächen eignet. Die Ausrichtung der Orientierung nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000] erzeugt ein Orientierungsfeld das in zylindrischen Bereichen den Hauptkrümmungsrichtungen entspricht. In nicht-parabolischen Bereichen hingegen soll der Verlauf der Schraffurlinien möglichst konstant sein. Dies wird erreicht durch die Bedingung, dass die Schraffurlinien innerhalb dieser Bereiche geodätischen Verlauf besitzen, d.h. $\kappa_G = 0$.

In [POLTHIER, 2002] werden zur Charakterisierung gerader geodätischer Linien auf triangulierten Oberflächen folgende Kriterien vorgeschlagen:

- gerader Verlauf innerhalb eines Dreiecks
- beim Übergang an Kanten gilt $\theta_r = \theta_l$ (Abb. 3.4)

Somit ist eine Bewertung des geodätischen Verlaufs der Schraffurlinien innerhalb nicht-parabolischer Bereiche anhand der Überprüfung dieser Eigenschaften möglich.

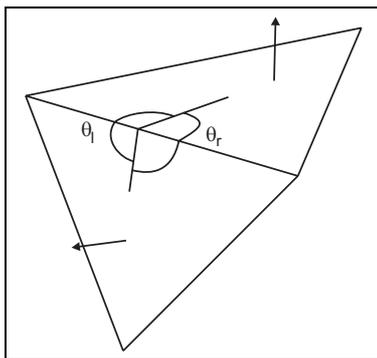


Abbildung 3.4: Beschreibung des Verlaufs einer geodätischen Linie an einer Kante auf einer triangulierten Oberfläche

Eine qualitative Variante der Beurteilung eines Orientierungsfeldes ist durch die Darstellung der ermittelten Richtungspaare an einem Punkt P_i möglich. Eine solche Abbildung kann dann zur Bewertung des zu erwartenden Schraffurmusters dienen. Hierbei erfolgt die Bewertung des Orientierungsfeldes unter anderem in Abhängigkeit von der Verdrehung benachbarter Orientierungen. So ist ein homogenes Feld durch kleinere Verdrehungen benachbarter Orientierungen gekennzeichnet. Weiterhin ist bei der Beurteilung des Orientierungsfeldes der beschriebene Verlauf in zylindrischen Bereichen zu beachten. Innerhalb dieser Bereiche entspricht eine geeignete Ausrichtung einer Orientierung entlang der Hauptkrümmungsrichtungen. Die qualitative Beurteilung der Orientierungsfelder entspricht somit einer Untersuchung der Ausrichtungen innerhalb erkennbarer zylindrischer und nicht-zylindrischer Bereiche.

3.2.3 Vergleich von Bildern

Die Bewertung von Darstellungen kann anhand von Expressivität und Effektivität [SCHUMANN und MÜLLER, 2002] erfolgen. Expressive Bewertungen sind unter anderem durch den Vergleich von wahrgenommenen und tatsächlichen Oberflächeneigenschaften möglich. Eine Analyse der Effizienz einer so erzeugten Darstellung setzt die Angabe eines Kriteriums bzgl. dessen die Effizienz überprüft werden soll voraus. Im Fall einer Beurteilung von Krümmungsinformation sind somit krümmungsrelevante Maßstäbe zu definieren anhand derer die Abbildung untersucht wird. Ein möglicher Vergleichsmaßstab kann die Größe des notwendigen Bereichs einer Oberflächenbeschreibung innerhalb einer Darstellung zur korrekten Oberflächenwahrnehmung sein. Dann kann aufgrund von krümmungsbasierten Darstellungstechniken, z.B. Schraffur oder Merkmalslinien, untersucht werden, ob sich durch die Anwendung dieser Techniken der notwendige Bereich minimieren lässt. Da die Motivation für die Anwendung von Krümmungsinformation die handgezeichnete Darstellungen sind, kann auch eine Gegenüberstellung künstlich generierten Illustrationen und den erwarteten Abbildungen Originalabbildungen zur Bewertung eingesetzt werden. Hier-

bei sind dann unter anderem krümmungsabhängige Einfärbungen, Orientierung von Schraffurlinien oder der Verlauf von Merkmalslinien zu vergleichen. Ebenso können Aussagen bzgl. der Krümmungsinformation unterschiedlicher Approximationsmethoden anhand der generierten Darstellungen getroffen werden. Dies entspricht dem Vergleich von erzeugten Bildern durch die gleiche Darstellungstechnik mit Krümmungsinformation unterschiedlicher Verfahren. Eine Gegenüberstellung von Darstellungen zur Beurteilung von Krümmungsinformation erfordert somit Definition eines Begriffssystem dass die zu untersuchenden Eigenschaften erfasst.

3.3 Techniken zum Vergleich ergebnisabhängiger und verfahrensabhängiger Eigenschaften

Innerhalb dieses Abschnitts erfolgt die Vorstellung eines Konzepts, um Krümmungsinformationen unterschiedlicher Verfahren berechnen und anschließend bewerten zu können. Hierbei soll unter anderem auf die Möglichkeiten eingegangen werden, die Eigenschaften aus den vorangegangenen Abschnitten anhand von Visualisierungstechniken zu überprüfen. Das entwickelte Konzept soll dazu dienen, eine einfache Klassifikation der Gütekriterien zu ermöglichen, d.h. festzulegen welche Eigenschaft der untersuchten Krümmungsinformation durch die Bewertung erfasst wird.

3.3.1 Histogramm und Farbverläufe

Bei einer Einschätzung von skalaren bzw. vektoriellen Krümmungsergebnissen ist zu entscheiden, in welcher Form sich die Krümmungswerte durch eine Visualisierung effizient analysieren lassen. Hierzu werden Histogramme und Farbverläufe verwendet. Durch ein Histogramm erfolgt eine Beschreibung der Häufigkeitsverteilung der abgebildeten Werte. Mit Hilfe einer solchen Verteilungsbeschreibung können dann globale Eigenschaften der Werte untersucht werden. So können einerseits Aussagen bzgl. des auftretenden Durchschnitts und der Varianz getroffen werden. Andererseits ermöglicht ein Histogramm die Identifikation von extremen Abweichungen. Durch die Abbildung von Werten auf Farbe und anschließender Darstellung können hingegen Aussagen bzgl. lokaler Verteilung von Werten getroffen werden. Diese Art der Untersuchung entspricht dem Vergleich von Werten bzw. den entsprechenden Farben innerhalb eines Gebietes. Bei der Beschreibung der Werte durch Farbe kann noch zwischen einer konstanten und nicht-konstanten Farbabbildung unterschieden werden. So lassen sich anhand einer konstanten Abbildung von Werten innerhalb eines Intervalls zusammenhängende Bereiche bzgl. dieses Wertes kennzeichnen.

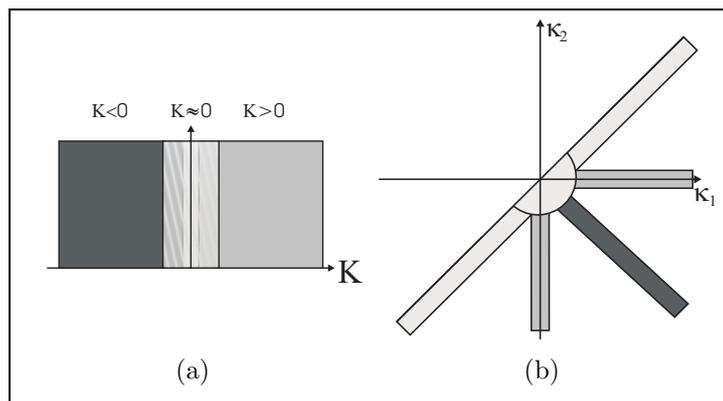


Abbildung 3.5: Beschreibung der Bereiche innerhalb eines Histogramms zur Beurteilung geometrischer Eigenschaften der Oberflächenpunkte, (a) Histogramm der Gauß'schen Krümmung Kennzeichnung der Bereiche für hyperbolische, elliptische und parabolische Bereiche (Abb. 2.3), (b) Kennzeichnung der Bereiche für planare, kugelige und zylindrische Punkte innerhalb der (κ_1, κ_2) Ebene, die Breiche beschreiben die in Abb. 2.10 illustrierten geometrischen Punktumgebungen

3.3.2 Skalare Krümmungsinformation

Zur Untersuchung bzw. Beurteilung von skalarer Krümmungsinformation können 1D- und 2D-Histogramme eingesetzt werden. Die Beschreibung der Verteilung skalarer Krümmungswerte, d.h. von κ_1, κ_2, H, K durch ein 1D-Histogramm ermöglicht Aussagen bzgl. der Kontinuität. So sind Diskontinuitäten einer Krümmungsgröße innerhalb einer solchen Verteilungsbeschreibung durch das Auftreten getrennter Bereiche gekennzeichnet. Weiterhin ermöglicht ein 1D-Histogramm der Länge des Gradienten nach (3.4) die Beurteilung einer stetigen bzw. kontinuierlichen Verteilung der Krümmungsgröße, für die der Gradient pro Dreieck ermittelt wurde. In diesem Fall sind unstetige bzw. nicht kontinuierliche Verteilungen durch einen hohen Wert der Gradientenlänge gekennzeichnet.

Die Beurteilung globaler Eigenschaften der geometrische Merkmale von Oberflächenpunkten ist anhand von 1D - Histogrammen und 2D - Histogrammen möglich. Die Beschreibung der Werteverteilung von K anhand eines 1D-Histogramms kann zum Treffen von Aussagen der geometrischen Eigenschaften von Punkten genutzt werden (Abb. 2.3). Zur Beurteilung globaler geometrischer Eigenschaften eignet sich aber auch das 2D-Histogramm zur Beschreibung der Verteilung von Wertepaaren κ_1 und κ_2 (Abb. 3.5). Die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften anhand eines (κ_1, κ_2) - Histogramms lässt im Vergleich zum K -Histogramm noch eine differenziertere Unterscheidung der geometrischen Eigenschaften zu. So sind durch die Abbildung der Hauptkrümmungswerte in ein solches 2D-Histogramm dann unter anderem konkave und konvexe Bereich erkennbar. Weiterhin ist eine Trennung elliptischer Punktumgebungen, d.h. $K > 0$, in kugelige und nicht-kugelige Nachbarschaften möglich. Auch parabolische Umgebungen, d.h. $K = 0$, sind durch ein (κ_1, κ_2) - Histogramm noch in zylindrische und planare Gebiete unterscheidbar.

Weiterhin können Aussagen bzgl. der Größe des auftretenden Radius innerhalb einer zylindrischen Nachbarschaft getroffen werden. Durch ein (κ_1, κ_2) - Histogramm ist somit eine einfache Rekonstruktion der durch das Wertepaar κ_1, κ_2 erfassten geometrischen Eigenschaft (Abb. 2.10) möglich.

Die Beschreibung der Verteilung von skalaren Krümmungsgrößen anhand von Farbabbildung hingegen läßt Untersuchungen bzgl. lokaler stetiger bzw. kontinuierlicher Verteilungen zu. So sind bei geeigneter Farbabbildung extreme Verteilungsänderungen durch starke Farbschwankungen gekennzeichnet. Weiterhin ermöglicht die Farbzuzuordnung die Identifikation von Punkten mit gleichen bzw. ähnlichen geometrischen Eigenschaften. Durch eine Abbildung der geometrischen Eigenschaft eines Punktes auf Farbe ist die Verteilung von Punkten mit dieser Eigenschaft auf der Oberfläche darstellbar.

Sollen hingegen geometrische Eigenschaften überprüft werden, ist eine Abschätzung bzw. Angabe der zu erwartenden skalaren Größen notwendig. Aufgrund der auftretenden Abweichung zwischen approximierten und erwarteten Werten ist dann eine Bewertung der Krümmungsgüte möglich. Die Abschätzung von Krümmungswerten kann durch das Verwenden einer Vergleichsgeometrie erfolgen. Die Krümmungseigenschaften dieser Vergleichsgeometrie entsprechen dann erwarteten Krümmungseigenschaften. Im Fall der Ermittlung aller Punkte mit zylindrischer Umgebung ist die Bestimmung der Zugehörigkeit eines Punktes zu $prop_{cylindric}$ erforderlich. Hierzu ist die Angabe von $\epsilon_{reliable}$ und ϵ_{ratio} notwendig. Die Abschätzung eines geeigneten bzw. zulässigen Wertes von $\epsilon_{reliable}$ kann durch das Einblenden eines Zylinders erfolgen. Für den Radius r dieses Zylinders gilt dann $1/r = \epsilon_{reliable}$, d.h. durch diesen Radius erfolgt die Abschätzung des zu erwartenden absoluten maximalen Hauptkrümmungswertes, da zur Bestimmung ob $P \in prop_{cylindric}$, die Bedingung $1/r = \epsilon_{reliable} < \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$ erfüllt sein muß. Wird dann eine Zugehörigkeitsbestimmung für verschieden ϵ_{ratio} durchgeführt, können die Punkte für die mit einem hohen Wert von ϵ_{ratio} gilt, dass $P \in prop_{cylindric}$, als zylindrisch bzgl. der geforderten zylindrischen Umgebung klassifiziert werden.

3.3.3 Vektorielle Krümmungsinformation

Zur qualitativen Beurteilung eines Schraffurmusters anhand der ermittelten Orientierungen an den Punkten P_i der Oberfläche ist eine geeignete Beschreibung dieser vektoriellen Größen erforderlich. Eine verdeckungsfreie Darstellung der Orientierungen ist durch die Beeinflussung der darzustellenden Oberflächenbereiche möglich. So kann durch eine kombinierte Darstellung von *backfacing* Dreiecken und Orientierungen an *frontfacing* Punkten P_i eine Beschreibung des Orientierungsfeldes für den sichtbaren Oberflächenbereich erzeugt werden.

3.3.4 Konzept

Die vorgestellten überprüfbareren verfahrensabhängigen und ergebnisabhängigen Eigenschaften lassen sich in dem in Abb. 3.6 folgenden Konzept zusammenfassen. Hierbei bezeichnen die Rohdaten, die eigentlichen Abtastwerte, aus denen die Geometriedaten erzeugt werden. Geometriedaten können unter anderem gegitterte, z.B. triangulierte, Oberflächenmodelle oder Volumendaten sein. Für diese Geometriebeschreibungen wird eine Approximation der Krümmungsgrößen durchgeführt, d.h. an jedem Oberflächenpunkt liegt Krümmungsinformation vor. Diese Werte werden dann zur Anwendung eines krümmungsbasierten Darstellungs-, Modellierungsverfahren usw. eingesetzt. Das Ergebnis dieser Verfahren bezeichnet die angewandten Krümmungsdaten. Die Analysedaten in Abb. 3.6 hingegen bezeichnen eine geeignete

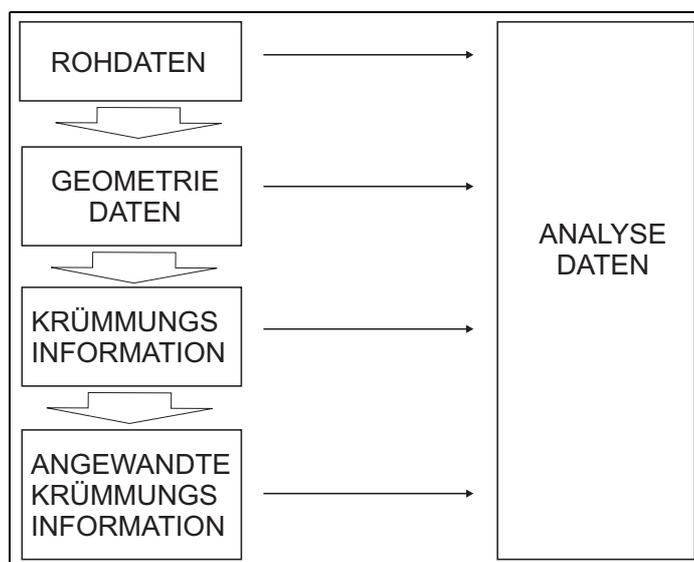


Abbildung 3.6: Beschreibung der unterschiedlichen Daten, die bei der Approximation und Anwendung von Krümmungsinformation auftreten

Beschreibung der zu untersuchenden Daten, um deren charakteristische Merkmale effizient und korrekt beurteilen zu können. Hierzu eignen sich Farabbildungen für lokale Eigenschaften und Histogramme für globale Eigenschaften. Die Beurteilung, d.h. die Analyse, der Krümmungsinformation ist somit aufgrund von Rohdaten, Geometriedaten, approximierten Krümmungsgrößen bzw. deren Anwendung möglich. Damit ist jetzt eine Klassifikation der vorgestellten Eigenschaften aus den vorangegangenen Abschnitten möglich, d.h. es kann entschieden werden, auf welchen Daten aus Abb. 3.6 sich die Eigenschaft bezieht.

Verfahrensabhängige Eigenschaften dienen zur Beurteilung von Roh- und Geometriedaten. Ergebnisabhängige Eigenschaften dienen hingegen zur Untersuchung ermittelter Krümmungsinformation, sowie zur Beurteilung der Resultate krümmungsabhängiger Verfahren.

4 Implementierung

Die Berechnung von Krümmungsinformation auf diskreten Oberflächenmodellen setzt einerseits Datenstrukturen zur Beschreibung dieser Geometrien voraus. Andererseits sind aber auch Verfahren zur Erzeugung und Beschreibung von Parametrisierungen erforderlich. Weiterhin werden Routinen benötigt, die Gleichungssysteme der *Least Square* Probleme zu lösen bzw. zur Minimierung von (2.54). Neben der eigentlichen Berechnung von Krümmungsinformation ist zur Überprüfung lokaler Eigenschaften auch die Darstellung der Modelle erforderlich, sowie die Anzeige von 1D und 2D Histogrammen zur Untersuchung globaler Eigenschaften. Weiterhin sollte eine einfache Anwendung bzw. Auswahl der Berechnungs- und Auswertungsmethoden möglich sein, um effizient verschiedene Verfahren testen und vergleichen zu können. Eine solche Entwicklungsumgebung bietet das Programm MEVISLAB [HAHN et al., 2003]. So ist durch die Einbindung verschiedener Bibliotheken der geforderte Funktionsumfang zur Berechnung und Auswertung von Krümmungsinformation realisierbar. Weiterhin ermöglicht die in MEVISLAB vorhandene Prototyping - Umgebung eine einfache Einbindung bzw. Anwendung der umzusetzenden Verfahren.

4.1 MevisLab

Die Realisierung der Verfahren erfolgt in MEVISLAB. Die Funktionen von MEVISLAB eignen sich zur effizienten Analyse medizinischer Daten. So kann bei der Softwareentwicklung mit Hilfe von MEVISLAB auf bereits vorhandene Datenstrukturen und Algorithmen zurückgegriffen werden. Die Erweiterung des Funktionsumfangs von MEVISLAB entspricht der Entwicklung neuer Module, die als Schnittstellen zu den entwickelten Algorithmen dienen. Die Anwendung existierender Verfahren und Datenstrukturen erfolgt wiederum durch den Einsatz der entsprechenden Module. Zur Beschreibung einer Kombination verschiedener Module, d.h. einer Reihenfolge, in der die Anwendung der Verfahren erfolgen soll, wird in MEVISLAB eine Prototyping-Umgebung bereitgestellt. Dies ermöglicht die Beschreibung eines Programmablaufs in Form eines Netzwerks. Netzwerkverbindungen verlaufen zwischen den Modulen. Somit liefern diese Verbindungen eine Beschreibung des Datenflusses, d.h. in welcher Reihenfolge die Verfahren auf die Daten angewandt werden.

4.2 Bibliotheken

Die innerhalb der Arbeit verwendeten Bibliotheken und die eingesetzte Funktionalität werden in Tab. 4.1 kurz vorgestellt.

MLWEM und ML	Datenstruktur zur Beschreibung diskreter Oberflächenmodelle, Bereitstellung von Objekten für Erzeugung und Anzeige von Histogrammen
SoWEM	Erzeugung von 3D Ansichten auf der Basis von OPENINVENTOR
CLAPACK	C-Schnittstelle zu Matrixoperationen der Fortranbibliothek LAPACK
L-BFGS-B	Fortran-Routine zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme nach [ZHU et al., 1997]

Tabelle 4.1: Bibliotheken

Die in Tab. 4.1 aufgeführten Bibliotheken stellen eine Reihe von Routinen und Datenstrukturen zur Verfügung, um eine Krümmungsabschätzung für diskrete Oberflächen durchzuführen.

4.2.1 MLWEM und ML

Die Einbindung der MLWEM-Bibliothek ermöglicht die Beschreibung von diskreten Oberflächengeometrien durch eine *Winged Edge* Struktur [BAUMGART, 1972]. Diese Struktur enthält einerseits die für eine Krümmungsapproximation notwendige topologische Information zur Generierung von Parametrisierungen, d.h. es können unter anderem die Nachbarschaften $nhd(P_i)$ anhand der Zusammenhangsinformation erzeugt werden. Andererseits ermöglicht die *Winged Edge* Beschreibung einer diskreten Geometrie schnelle Zugriffe auf einzelne Elemente, d.h. Knoten, Flächen und Kanten, des Oberflächengitters. Weiterhin erfolgt durch die verwendete *Winged Edge* Struktur eine effiziente, d.h. möglichst redundanzfreie, Beschreibung von Gitternetzen. Zusätzlich zu den *Winged Edge* Informationen besitzen Knoten noch Angaben über aller inzidenten Kanten und Flächen. Innerhalb der vorhandenen *Winged Edge* Struktur ist das Auftreten von Knoten mit Nicht-2-Manigfaltiger Umgebung bzgl. des topologischen Radius $r = 1$ möglich.

Zur Darstellung und Generierung von Histogrammen wurden Strukturen aus der ML-Bibliothek eingesetzt. So wird zur Beschreibung von 1D Histogrammen entsprechende Instanzen der Klasse `HistogramObject` genutzt. Dessen Darstellung erfolgt durch die Erzeugung einer Kurve basierend auf Daten aus einem `HistogramObject`. Zur Beschreibung bzw. Generierung von Kurven werden Instanzen der Klasse

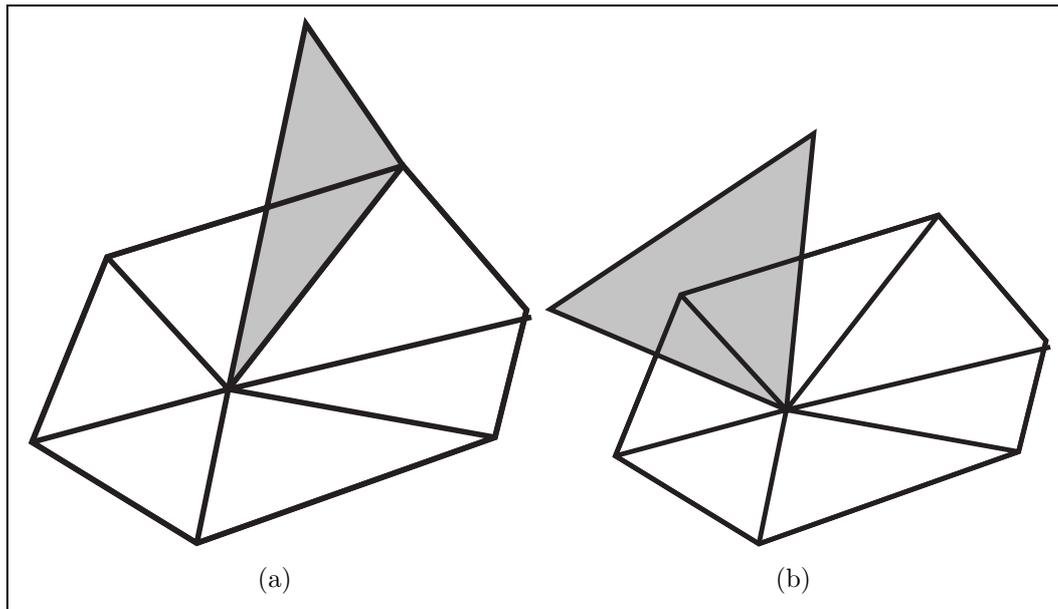


Abbildung 4.1: Beispiele möglicher degenerierter Elemente in der verwendeten *Winged Edge* Struktur (a) Kante besitzt 3 inzidente Flächen, (b) Knoten besitzt inzidentes Dreieck an Knoten, wobei keine inzidente Kante an diesen Knoten existiert, die dieses Dreieck und ein weiteres inzidentes Dreieck enthält

`CurveData` genutzt. Eine Konvertierung von Histogrammdata in Kurvendata liefert dann darstellbare `CurveData`-Objekte. Die Erzeugung von 2D-Histogrammen ist durch Instanzen der Klasse `PageImg` möglich. Die Verwendung dieser Klasse ermöglicht die Generierung darstellbarer 2D Felder. Die erzeugten Histogramme entsprechen dann Grauwertbildern, die zur Beschreibung der Verteilung von Krümmungswerten dienen.

4.2.2 SoWEM

Die SoWEM-Bibliothek stellt den Funktionsumfang der OPENINVENTOR Bibliothek [WERNECKE, 1994] zur Verfügung. Bei OPENINVENTOR handelt es sich um eine objektorientierte Graphikbibliothek, die auf OpenGL aufsetzt. Die Beschreibung von 3D-Szenen durch OPENINVENTOR Objekte erfolgt durch einen Baum, dem Szenengraphen. Der Szenengraph enthält in Blattknoten die darzustellenden Objekte, z.B. Linien und Dreiecke. Die inneren Knoten des Baumes werden unter anderem zur Angabe von Transformations- und Materialinformation eingesetzt. Das Rendern der Objekte entspricht der Traversierung dieses Szenengraphen durch eine Tiefensuche, wobei die Information der inneren Knoten die Darstellung der Objekte in den Blattknoten beeinflusst. Zur Darstellung und Untersuchung von Krümmungsinformation werden Instanzen der Klasse `SoShape` genutzt. Diese Objekte ermöglichen dann unter anderem die Erzeugung von Linien und Oberflächenbeschreibungen durch einzelne Flächen.

4.2.3 clapack

Diese Bibliothek stellt eine C-Schnittstelle zu den Routinen der fortran-Bibliothek LAPACK [ANDERSON, 1992] dar. CLAPACK Routinen werden vorwiegend zur Matrizen-Zerlegung eingesetzt, z.B. QR- oder SVD-Zerlegung. Diese Zerlegungen ermöglichen unter anderem Lösungsbestimmung für über- und unterbestimmte Gleichungssysteme. Somit sind durch CLAPACK-Routinen die Lösungen der Gleichungssysteme der *Least Squares* - Probleme bestimmbar. Es wird die Methode `dgelss` zur Berechnung einer *LeastSquares* Lösung verwendet, da diese sowohl für überbestimmte als auch für unterbestimmte Gleichungssysteme Ergebnisse liefert. Für überbestimmte Gleichungssystem liefert diese Methode die eindeutig bestimmbare *LeastSquares* Lösung. Im Fall eines unterbestimmten Gleichungssystems liefert die Funktion die Lösung mit minimalem Betrag.

4.2.4 L-BFGS-B

Zur Berechnung von Orientierungen der Schraffurlinien, d.h. einer Minimierung von (2.54), wird in [HERTZMANN und ZORIN, 2000] die Anwendung des L-BFGS-B Algorithmus aus [ZHU et al., 1997] vorgeschlagen. Das zu minimierende Problem enthält keine zusätzlichen Bedingungen, somit kann die von [ZANDER et al., 2004] vereinfachte Schnittstelle genutzt werden, um die optimalen Orientierungen zu bestimmen. Zur Minimierung von (2.54) mit Hilfe des L-BFGS-B Algorithmus ist dann noch die Berechnung des Wertes und Gradienten von (2.54) für eine gegebene Konfiguration, d.h. einer aktuellen Ausrichtung der Orientierungen, notwendig.

4.3 Entwickelte Module

Zur Realisierung von verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Krümmungsinformation und Auswertung der Verfahren wurden die folgenden Module entwickelt Tab. 4.2, die die Schnittstelle zu den implementierten Approximations- und Analysemethoden darstellen.

WEMCurvature	Auswahl für Krümmungsoperatoren
WEMCurvatureDiagnosis	Auswertung approximierter Krümmungswerte
SoWEMCurvatureIllustration	Erzeugung eines 3D-Modells zur Untersuchung darstellbarer krümmungsbasierter Eigenschaften

Tabelle 4.2: Module

Das verwendete Netzwerk zur Berechnung und Analyse von Krümmungsinformation, d.h. die Einbindung der entwickelten Module innerhalb von MEVISLAB, wird in Abb. 4.2 gezeigt.

Das WEMCurvature Modul dient zur Auswahl eines Verfahrens zur Krümmungsabschätzung. Für *Surface Fitting* Verfahren ist noch die Größe des zu parametrisierenden Bereichs durch die Angabe eines zulässigen topologischen Radius möglich. Nach Anwendung des gewählten Verfahrens liegt Krümmungsinformation an jedem nicht degenerierten Knoten des Oberflächennetzes vor. Weiterhin dient das Modul zur Initialisierung der notwendigen Variablen von Knoten, Kanten und Dreiecke, um die Verfahren zur Krümmungsapproximation anwenden zu können. Auch die Erzeugung eines geglätteten Orientierungsfeldes nach (2.54) ist mit Hilfe dieses Moduls möglich. Hierzu können dann entsprechende ϵ Werte zur Kennzeichnung zuverlässiger, d.h. zylindrischer bzw. parabolischer, Punkte angegeben werden. Eine weitere Option ist die Bestimmung des Gradienten und dessen Länge für Dreiecke bzgl. eines ausgewählten skalaren Krümmungswertes.

Das Modul WEMCurvatureDiagnosis dient zur Auswertung der Krümmungsinformation. Hierzu können Informationen für Krümmungswerte eines Verfahren oder der Vergleich von Krümmungswerten zweier unterschiedlicher Verfahren erzeugt werden. So ist die Anzeige der Minima und Maxima skalarer Krümmungswerte möglich. Auch geometrische Eigenschaften von Punkten P_i , d.h. die Bestimmung der Zugehörigkeit zu einer Eigenschaftsmenge, z.B. *prop_{cylindric}*, *prop_{spherical}* und *prop_{plane}*, sind durch die Funktionen dieses Moduls überprüfbar. Zur Definition der Eigenschaftsmengen ist die Angabe der entsprechenden ϵ Werte erforderlich. Anschließend ist die Anzeige, wie viele Knoten das Eigenschaftskriterium erfüllen, möglich. Die Farbzuzuweisung für Knoten kann anhand von Krümmungswerten und geometrischen Eigenschaften erfolgen. Im ersten Fall ist die Definition eines Intervalls und zweier Farben notwendig. Anschließend können die Farben in Abhängigkeit von der Intervallzugehörigkeit zugeordnet werden. Hierzu kann eine konstante oder lineare Farbabbildung gewählt werden. Werden hingegen geometrische Eigenschaften zur Farbzuzuordnung verwendet, ist nur die konstante Farbabbildung möglich. Auch für Dreiecke kann eine Farbzuzuordnung definiert werden. Dies ist dann bzgl. der Gradientenlänge möglich. Hierzu ist wiederum die Definition eines Intervalls und Auswahl einer Farbabbildung, d.h. konstant oder linear, erforderlich. Der Vergleich von Krümmungsgrößen ist einerseits durch die Anzeige auftretender maximaler und minimaler Differenzen bzgl. einer skalaren Krümmungsgröße am selben Oberflächenpunkt P_i möglich. Weiterhin können auch Farbabbildungen in Abhängigkeit von Differenzen definiert werden. Hierzu ist wiederum die Definition eines Intervalls und Angabe der zu verwendenden Farbabbildung erforderlich. Mit Hilfe dieses Moduls können 1D- und 2D-Histogramme erzeugt werden. Für diese Verteilungsbeschreibung ist neben der Auswahl der zu untersuchenden Krümmungswerte, d.h. der Achsenbezeichner, noch die Angabe von Ausdehnung und zu verwendender Auflösung möglich.

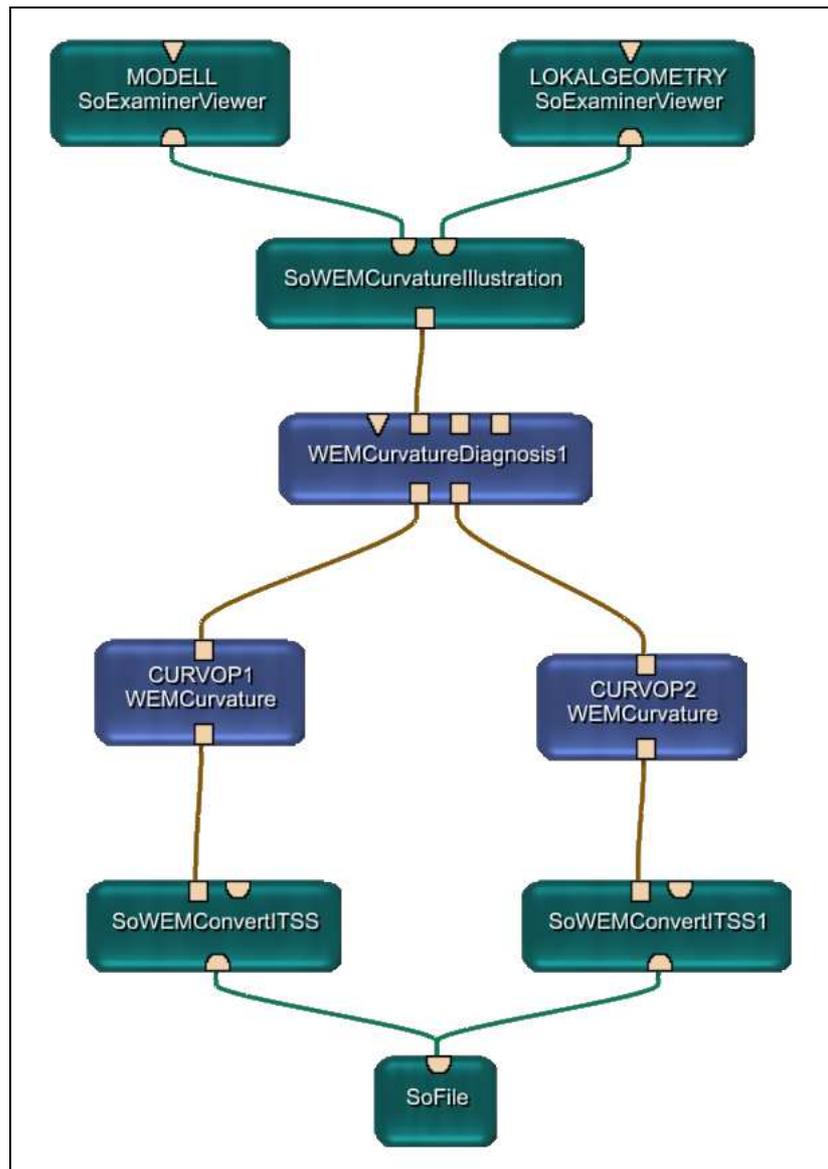


Abbildung 4.2: Beispielnetzwerk zur Krümmungsanalyse mit den erzeugten Modulen: WEM-Curvature, WEMCurvatureDiagnosis, SoWEMCurvatureIllustration

Das Modul SoWEMCurvatureIllustration kann zur Darstellung von Farbabbildungen und Orientierungsfeldern verwendet werden. Zur Ansichtsgenerierung werden die in WEMCurvatureDiagnosis bestimmten Merkmale, d.h. entsprechend eingefärbte Knoten oder Dreiecke, für die Oberflächenbeschreibung verwendet. Die eigentliche Darstellung wird durch die Umwandlung der *Winged Edge* Struktur in eine OPENINVENTOR kompatible Geometriebeschreibung realisiert. Zur Erzeugung von Ansichten der sichtbaren Teile eines Orientierungsfeldes wird die Orientierung der aktuellen Kamera benötigt. Dies ermöglicht eine Unterscheidung in *frontfacing* und *backfacing* Elemente des Oberflächennetzes. Anschließend kann dann die Dar-

stellung der *backfacing* Dreiecke und Orientierungen an *frontfacing* Punkten auf der Oberfläche zur Beschreibung des sichtbaren Bereichs des Orientierungsfeldes verwendet werden. Weiterhin stellt das Modul auch Methoden bereit, lokale Information eines Knotens anzuzeigen. So sind Darstellungen der erzeugten Passfläche, der verwendeten Umgebung $nhd(P_i)$ sowie deren Parametrisierung $nhd(P_i)$, möglich.

4.4 Entwickelte Datenstrukturen

Neben der Anwendung bereits bestehender Datenstrukturen bzw. Methoden aus existierenden Bibliotheken wurden zur Bestimmung von Krümmungsinformation die in Abb. 4.3 angegebenen Datenstrukturen bzw. C++-Klassen entwickelt. Mit Hilfe von Instanzen abgeleiteter `CurvatureOP`-Klassen ist die Approximation von Krümmungsinformation an einem Knoten des Oberflächengitters möglich. Die im Grundlagenkapitel vorgestellten Parametrisierungen können durch Instanzen abgeleiteter Klassen von `Map` erzeugt werden. Durch die Generierung von `Neighbourhood`-Objekten sind Umgebungsbeschreibungen $nhd(P_i)$ mit topologischen Metriken möglich.

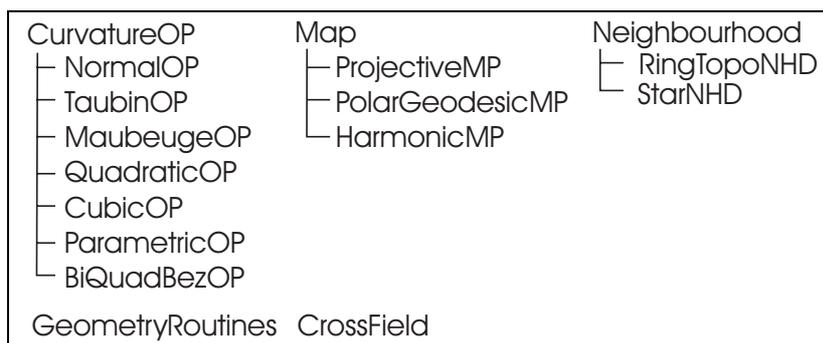


Abbildung 4.3: implementierte Klassenstruktur

Die Klasse `GeometryRoutines` dient als *Wrapper*-Objekt für eine Reihe von elementaren Vektor- und Matrixoperationen, z.B. Skalar- und Kreuzprodukt oder Invertierung von 4x4 Matrizen.

Geglättete Orientierungsfelder können durch Instanzen der Klasse `CrossField` erzeugt werden. Die zur Optimierung von (2.54) notwendigen Methoden stellt diese Klasse bereit. Zur Initialisierung werden pseudo-parabolische Punkte identifiziert und Kanten, die Punkte mit zu optimierenden Orientierungen besitzen, gekennzeichnet. Weiterhin besitzt diese Klasse die erforderlichen Methoden zur Lösung von (2.54), d.h. Berechnung und Gradientenbestimmung von (2.54). Die `CrossField`-Routine zur Anwendung des L-BFGS-B nutzt die Schnittstelle von [ZANDER et al., 2004].

Die Verwendung eines **Star**-Objektes ermöglicht eine Klassifikation der Punkte bzgl. der direkten Umgebung, d.h. des topologischen Radius $r = 1$, in 2-manigfaltig, Randpunkt oder degeneriert. Ein Punkt des Oberflächennetzes wird als 2-manigfaltig erkannt, wenn ein Umlauf entlang von inzidenten Kanten und Flächen möglich ist und die gegebenen Zusatzinformationen bzgl. inzidenter Kanten und Flächen mit den *Winged Edge* Informationen übereinstimmt. Randpunkte sind durch das Fehlen einer inzidenten Fläche gekennzeichnet, d.h. der vollständige Umlauf ist nur aufgrund dieser fehlenden Fläche nicht möglich. Alle anderen Punkte werden als degeneriert markiert.

RingTopo-Objekte liefern Zusammenhangsinformationen für einen Oberflächenpunkt P_i , d.h. die Beschreibung von $nhd(P_i)$. Zur Erzeugung eines solchen Objektes ist die Angabe des Knotens und des zulässigen topologischen Radius erforderlich. Neben der Kennzeichnung zugehöriger Elemente, d.h. Kanten, Flächen und Knoten, der Menge $nhd(P_i)$, kann auch auf Randelemente zugegriffen werden. So besitzen Randkanten eine äußere und innere Fläche. Randknoten sind durch zwei inzidente Randkanten gekennzeichnet. Randflächen hingegen enthalten eine Randkante. Weiterhin gilt, dass Randelemente in Form einer sortierten Liste, d.h. entlang eines Umlaufsinns, gegeben sind. Die Generierung von Nachbarschaften, für deren topologischen Radius gilt $r > 1$, erfolgt bzgl. der sortierten Randpunkte, d.h. entlang eines Umlaufsinns des zuletzt bestimmten Ringes mit topologischem Radius $r - 1$. Eine Initialisierung erfolgt durch die Bestimmung der *star* Nachbarschaft. Für die Korrektheit des Verfahrens ist die Existenz einer einzigen Randkurve Voraussetzung. Der Ring wird um die Elemente, d.h. Knoten, Kanten und Dreiecke, erweitert, die sich innerhalb der *star* Nachbarschaften von Randpunkten befinden (Abb. 4.4) und noch nicht als ringzugehörig markiert wurden. Die Erweiterung durch Elemente innerhalb der *star* Nachbarschaft eines Randpunktes erfolgt durch die Auswahl eines Umlaufsinns, der dem der Sortierung der Randpunkte entspricht. Nach einem Umlauf des Randes $r - 1$ -Rings sind alle zugehörigen Elemente der Menge $nhd(P_i)$ mit topologischem Radius r bestimmt. Anschließend erfolgt noch die Bestimmung einer sortierten Liste von Randelementen dieses Ringes.

Map-Objekte werden zur Erzeugung der entsprechenden Parametrisierung verwendet. Das Ergebnis einer Parametrisierung sind *domain* Koordinaten im \mathbb{R}^2 , d.h. in der Parameterebene, für entsprechende *range* Koordinaten im \mathbb{R}^3 . Die Parametrisierungsverfahren, die die **Map**-Objekte verwenden, sind in Tab. 4.3 aufgeführt.

Map	Verfahren
ProjectiveMP	Projektion [GOLDFEATHER, 2001]
GeodesicPolarMP	geodätische Polarkoordinaten [WELCH und WITKIN, 1994]
HarmonicMP	topologieerhaltende Parametrisierung [ECK et al., 1995]

Tabelle 4.3: Parametrisierungsverfahren

Zur Initialisierung eines **Map**-Objektes ist die Angabe einer zu parametrisierenden Punktumgebung $nhd(P_i)$ erforderlich. Diese Umgebungsbeschreibung ist durch eine

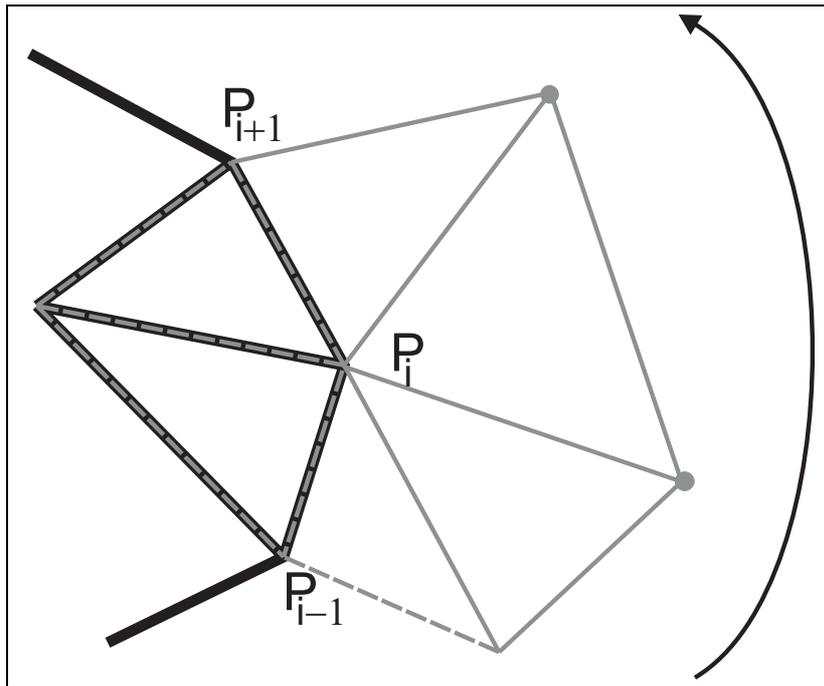


Abbildung 4.4: Erweiterung des Ringes an einem Randpunkt P_i , entlang einer sortierten Randpunktfolge $(\dots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots)$, Kennzeichnung der Elemente von $star(P_i)$ durch graue Linien wobei grau gestrichelte Linien bereits eingefügte Elemente beschreiben, d.h. die entsprechenden Kanten, die Dreiecke die von diesen Linien begrenzt sind sowie die Anfangs- und Endpunkte dieser Linien

Oberflächenpunkt P_i und den zu verwendenden zulässigen topologischen Radius r möglich. Anhand dieser Information wird das entsprechende `RingTopo`- Objekte erzeugt, dass dann eine Beschreibung von zugehörigen Elementen zu $nhd(P_i)$ liefert. Die Bestimmung der *domain* - Koordinaten (u, v) erfolgt dann abhängig vom zu verwendenden Parametrisierungsverfahren.

Die Bestimmung von Krümmungsinformation für einen Oberflächenpunkt P_i ist durch `CurvatureOP`-Objekte möglich. Die Verfahren verwenden `Map`-Objekte, um die erforderliche Parametrisierung der Punktumgebung zu erzeugen. Die von den Operatoren zur Krümmungsbestimmung umgesetzte Methoden und verwendete Parametrisierungsverfahren werden in Tab. 4.4 zusammengefasst.

<code>CurvatureOP</code>	Verfahren + verwendete <code>Map</code> -Klasse
<code>NormalOP</code>	<i>Curve Fitting</i> nach [GOLDFEATHER, 2001] <code>ProjectiveMP</code>
<code>TaubinOP</code>	<i>Curve Fitting</i> nach [TAUBIN, 1995] <code>ProjectiveMP</code>
<code>MaubeugeOP</code>	<i>Curve Fitting</i> nach [BARR et al., 2002] <code>ProjectiveMP</code>
<code>QuadraticOP</code>	quadratische Passfläche [GOLDFEATHER, 2001] <code>ProjectiveMP</code>
<code>CubicOP</code>	Kubische-Adjazenz-Normalen-Methode [GOLDFEATHER, 2001] <code>ProjectiveMP</code>
<code>ParametricOP</code>	parametrische Fläche für $star(P_i)$ [RÖSSL et al., 2000b] <code>GeodesicPolarMP</code>
<code>BiQuadBezOP</code>	biquadratische Bezierfläche [ANSHUMAN RAZDAN, 2005] <code>HarmonicMP</code>

Tabelle 4.4: Krümmungsoperatoren

Die Auswahl eines bestimmten Verfahrens zur Approximation von Krümmungsinformation erfolgt durch die Anwendung einer Instanz einer abgeleiteten Klasse von `CurvatureOP`. Für *Curve Fitting*-Verfahren ist zur Initialisierung ist die Angabe des Punktes P_i notwendig. Bei *Surface Fitting*-Verfahren hingegen ist noch die Beschreibung der Größe des zu parametrisierenden Umgebungsbereichs durch die Angabe des zulässigen topologischen Radiuses möglich.

5 Ergebnisse

Innerhalb dieses Kapitels werden einige Anwendungsbeispiele der jetzt überprüfbareren Eigenschaften von Krümmungsinformation gegeben. Ergebnisse werden anhand einer durchgeführten Untersuchung der implementierten Verfahren vorgestellt und analysiert.

5.1 Einsetzbare Techniken

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit umgesetzten und jetzt anwendbaren Analysetechniken. Hierzu wird anhand einiger Beispiele die Überprüfung lokaler und globaler Eigenschaften von Oberflächenmodellen aus klinischen Datensätzen demonstriert.

5.1.1 Untersuchung von lokalen Eigenschaften

Die Untersuchung lokaler Eigenschaften durch Farbabbildungen von Krümmungsinformation setzt zum einen die Auswahl einer geeigneten Abbildung der Werte auf Farbe voraus. Zum anderen ist zur Analyse dieser Charakteristika noch die Möglichkeit der Exploration innerhalb der Daten erforderlich. Ziele einer so durchgeführte Analyse sind unter anderem:

- Kontinuität: Untersuchung der Verteilung
- Korrektheit: Überprüfen der durch approximierte Krümmungsinformation beschriebenen geometrischen Eigenschaften
- Unterschiede: Suche nach verfahrensabhängigen Unterschieden anhand des Vergleichs approximierter Werte an einem Oberflächenpunkt

Die Bestimmung der Korrektheit eines Krümmungswertes setzt das Wissen bzgl. des richtigen Wertes voraus. Im Fall der vorliegenden segmentierten Daten liegt kein Vergleichswert vor. Hierzu ist eine Abschätzung des zu erwarteten Krümmungswertes aufgrund der lokalen Eigenschaften der Geometrie erforderlich. Zur Bestimmung eines geeigneten Referenzwertes können Vergleichsgeometrien verwendet werden. Die in Abb. 5.1 vorgestellte Methode dient zur Beschreibung der dadurch möglichen Beurteilung geometrischer Eigenschaften.

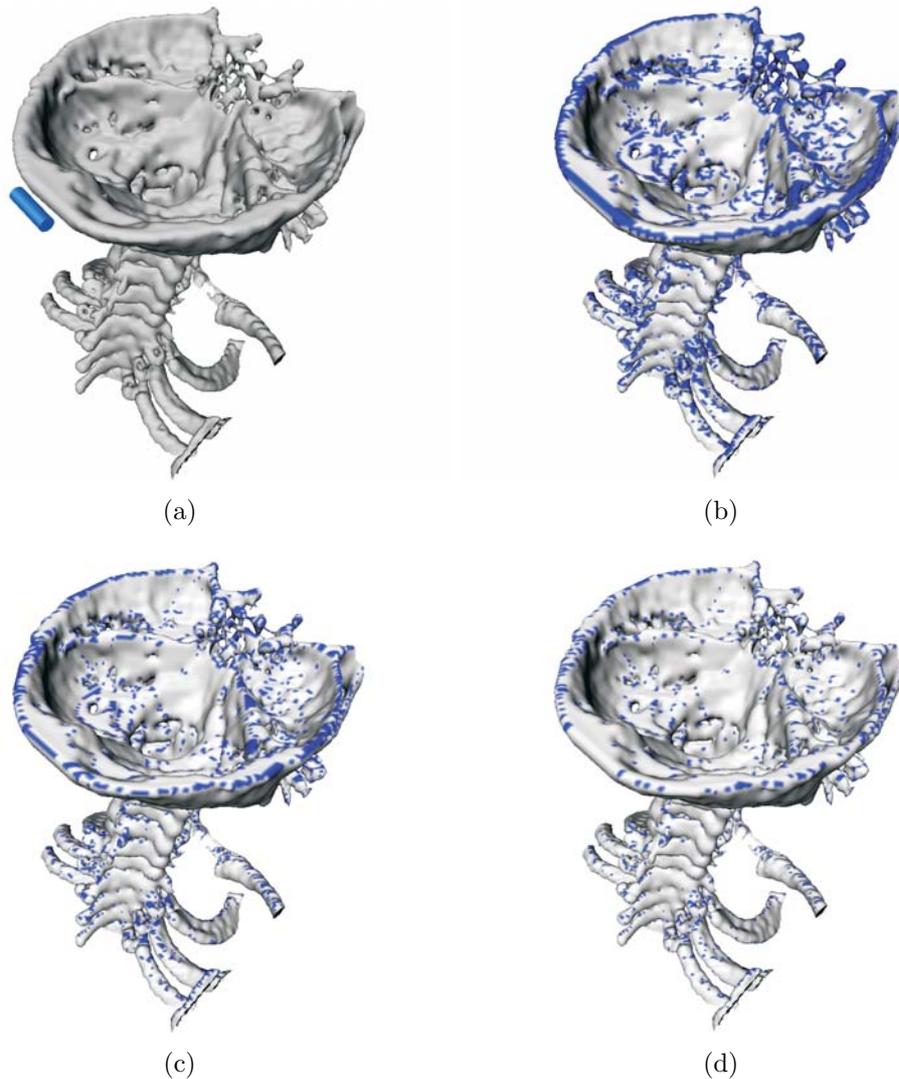


Abbildung 5.1: Verwendeter Datensatz in (a) Schädel sowie Beschreibung von zu erkennenden zylindrischen Bereiche durch Einblenden eines Zylinder mit Radius $r = 3$, d.h. $\epsilon_{reliable} \approx 0.33$, als zylindrisch erkannte (b) $\epsilon_{ratio} = 2$, (c) $\epsilon_{ratio} = 5$, (d) $\epsilon_{ratio} = 10$

Die Beurteilung, inwieweit eine zylindrische Umgebung durch den Krümmungsoperator erkannt wird, erfolgt bzgl. der Punkte an einer Schädelkante. Hier wird das Einblenden eines Zylinder zur Abschätzung von $\epsilon_{reliable}$, d.h. von $\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)$, genutzt. Anschließend erfolgt eine Bestimmung von $prop_{cylindric}$ für wachsende Werte von ϵ_{ratio} . Wobei zylindrische Punkte durch große Werte von ϵ_{ratio} gekennzeichnet sind.

Eine lokale Überprüfung der Kontinuität einer Verteilung von Krümmungswerten, ist jetzt unter anderem durch das Abbilden der Gradientenlänge (3.3) auf Farbe

möglich. Diese Art der Untersuchung ist auch zur Identifizierung von Bereichen mit starken Änderungen bzgl. der gewählten Krümmungsgröße geeignet.

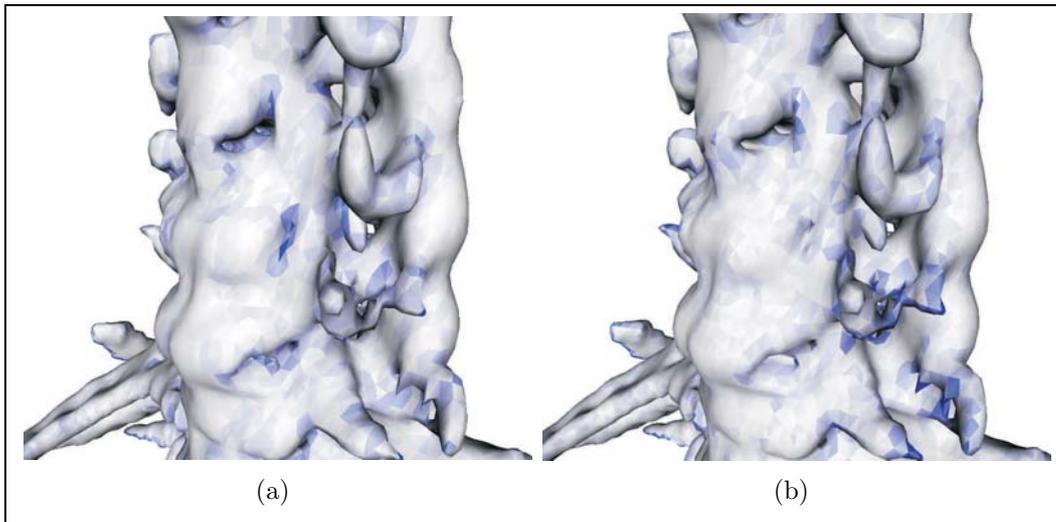


Abbildung 5.2: Beschreibung der Verteilung von ermittelten Hauptkrümmungswerten nach [BARR et al., 2002] durch eine kontinuierliche lineare Farbzuoordnung, d.h. eine Abbildung des Intervalls $0 < |\nabla(\kappa_i)| < 3$ auf einen Farbverlauf von weiß nach blau, (a) $\nabla(\kappa_1)$ und (b) $\nabla(\kappa_2)$

Der Einfluss auf die Verteilungsänderung von skalaren Krümmungswerten bei der Verwendung erweiterter Nachbarschaften ist unter anderem durch Abbildung der Gradientenlänge $\nabla(\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|))$ auf Farbe möglich (Abb. 5.3).

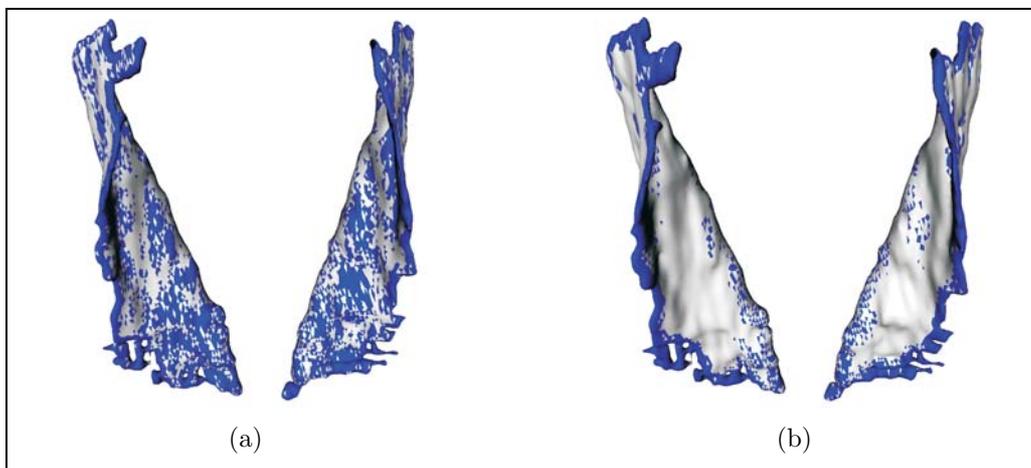
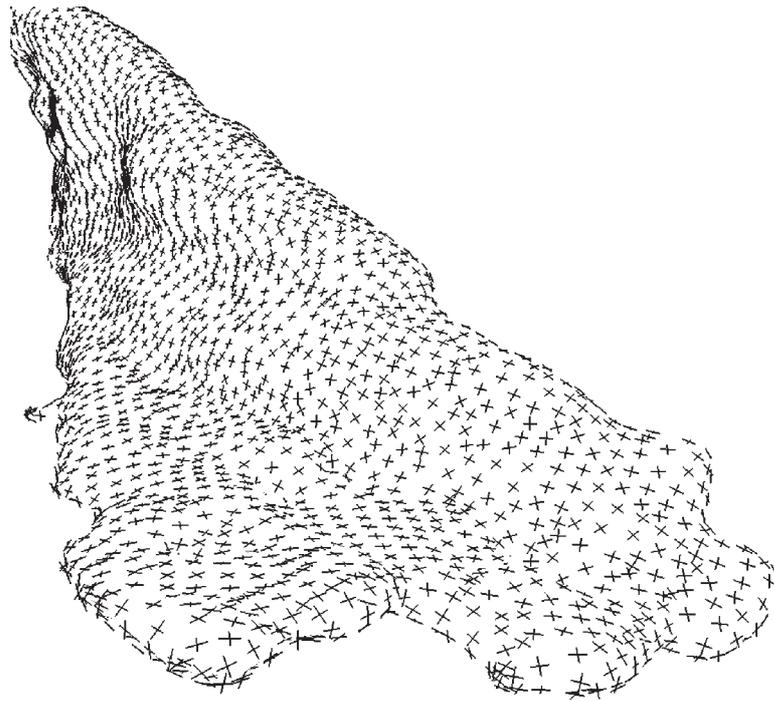


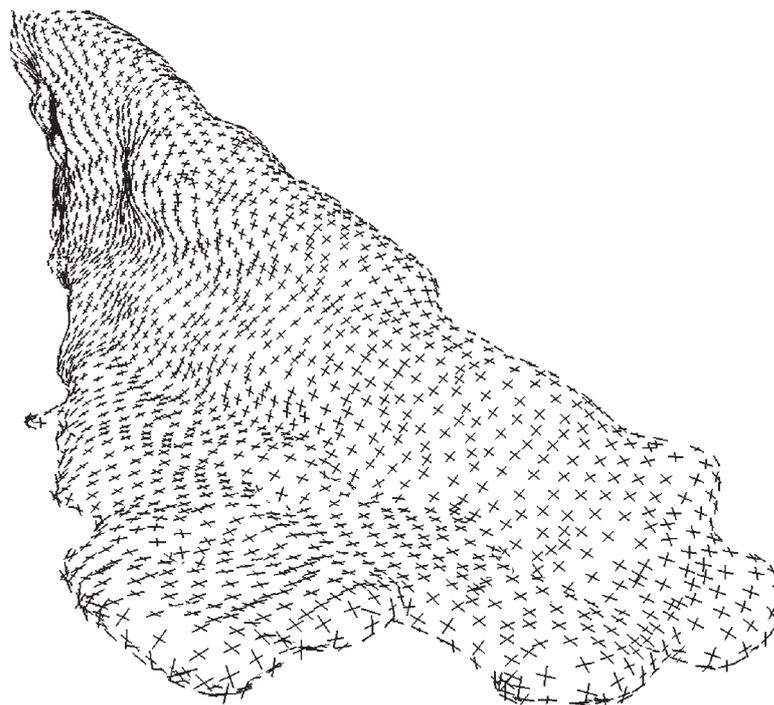
Abbildung 5.3: Beschreibung der Verteilung skalarer Krümmungswerte durch Gradientenlänge, d.h. von $\nabla(\max(|\kappa_1|, |\kappa_2|))$, Dreiecke in denen die Gradientenlänge > 0.1 ist sind blau eingefärbt, (a) QuadraticOP mit $r = 1$ (b) BiQuadBezOP mit $r = 5$, Verteilungsänderung durch Anwendung erweiterter Nachbarschaft, sichtbare Glättung der Krümmungswerte in schwach konkaven bzw. schwach konvexen Bereichen

Untersuchungen, inwieweit sich die Orientierungsfelder zur Generierung von Schraffurlinien eignen, sind durch die Gegenüberstellungen verschiedener Ausrichtungsbeschreibungen möglich. So sind nun Vergleiche von Hauptkrümmungsrichtungen und geglätteter Orientierungen nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000] durchführbar (Abb. 5.4).

Anhand der in Abb. 5.4 gezeigten Orientierungsfelder sind dann qualitative Analysen der zu erwartenden Schraffurmuster möglich. Weitere Abbildungen von Orientierungsfeldern befinden sich im Anhang der Arbeit.



(a)



(b)

Abbildung 5.4: Orientierungsfelder auf einer Muskeloberfläche (a) nicht geglättetes Orientierungsfeld entlang der approxiierten Hauptkrümmungsrichtungen (b) geglättetes Orientierungsfeld nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000]

5.1.2 Untersuchung globaler Eigenschaften

Die Untersuchung der Charakteristika anhand von Histogrammen kann zur Analyse globaler Eigenschaften anhand der beschriebenen Verteilung dienen. Aussagen sind dann einerseits bzgl. skalarer Verteilungseigenschaften wie z.B. Durchschnitt, Varianz oder auftretender Minima und Maxima möglich. Andererseits kann aber auch die qualitative Untersuchung der Verteilung von Krümmungswerten zur Bewertung dieser Größen genutzt werden. Ziel einer solchen Analyse kann zum einen die Bewertung der Korrektheit von Krümmungsgrößen anhand der Abweichung der Verteilung von der erwarteten Verteilung sein. Andererseits ermöglicht diese Art der Untersuchung aber auch den Vergleich von tatsächlich auftretenden und angenommenen Verteilungseigenschaften, wobei das Ergebnis die Angabe einer Referenzverteilung ist. Eine solche Referenzverteilung kann dann zur Klassifizierung von Oberflächenmodellen dienen, d.h. die Charakterisierung von Oberflächenmodellen aufgrund von globalen Verteilungseigenschaften der Krümmungsgrößen.

Für die in Abb. 5.5 dargestellten Oberflächenbeschreibungen von Muskeln sind trotz des vorhandenen Tesselierungsunterschiedes, d.h. unterschiedliche Anzahl von Dreiecken, die folgenden Gemeinsamkeiten erkennbar:

- ein großer schwach konkaver und ein großer schwach konvexer Bereiche
- ein stark zylindrischer konvexer Bereich, der Rand

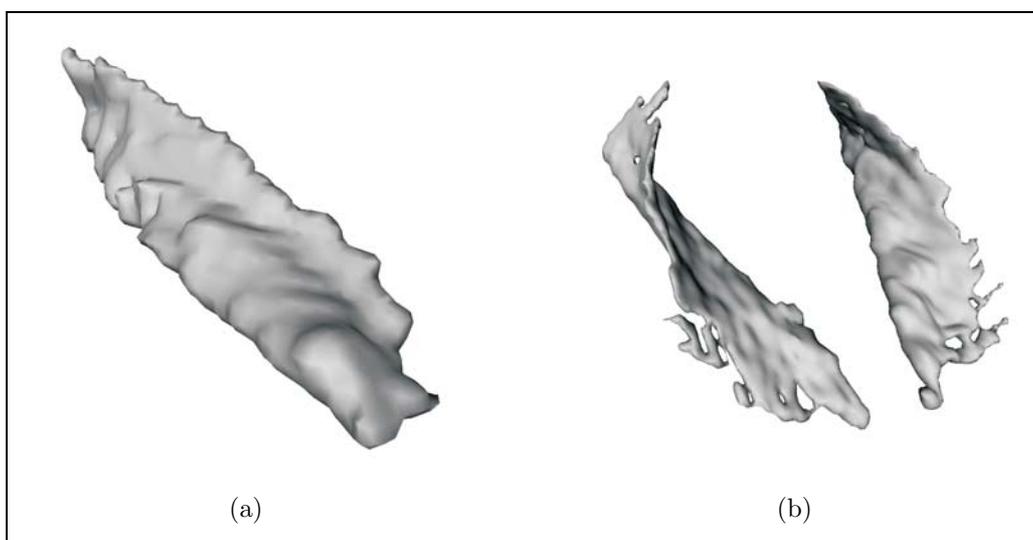


Abbildung 5.5: Verwendete Muskeldaten (a) 1600 Punkte (b) 5000 Punkte je Muskel, da beide Strukturen ähnliche globale Eigenschaften besitzen, ist die Analyse dieser Eigenschaften auch für Datensätze mit zwei Modellen durchführbar

Diese beiden Annahmen können zur Beschreibung einer zu erwartenden Verteilung von Hauptkrümmungswerten innerhalb eines κ_1, κ_2 -Histogramms verwendet werden. Hierbei soll $\kappa_1 < \kappa_2$ gelten. Für schwach konkave Bereiche kann dann ein

kleiner positiver κ_1 angenommen werden, wobei $\kappa_2 > 0$ ist. In schwach konvexen Gebieten hingegen tritt ein negativer aber kleiner Absolutwert von κ_2 auf, wobei $\kappa_1 < 0$ gilt. Für stark zylindrische konvexe Punkte gilt weiterhin, dass $\kappa_2 \approx 0$ und $\kappa_2 \ll 0$. Aufgrund dieser Annahmen bzgl. der Hauptkrümmungswerte ist dann die Beschreibung einer zu erwartenden Verteilung möglich (Abb. 5.6).

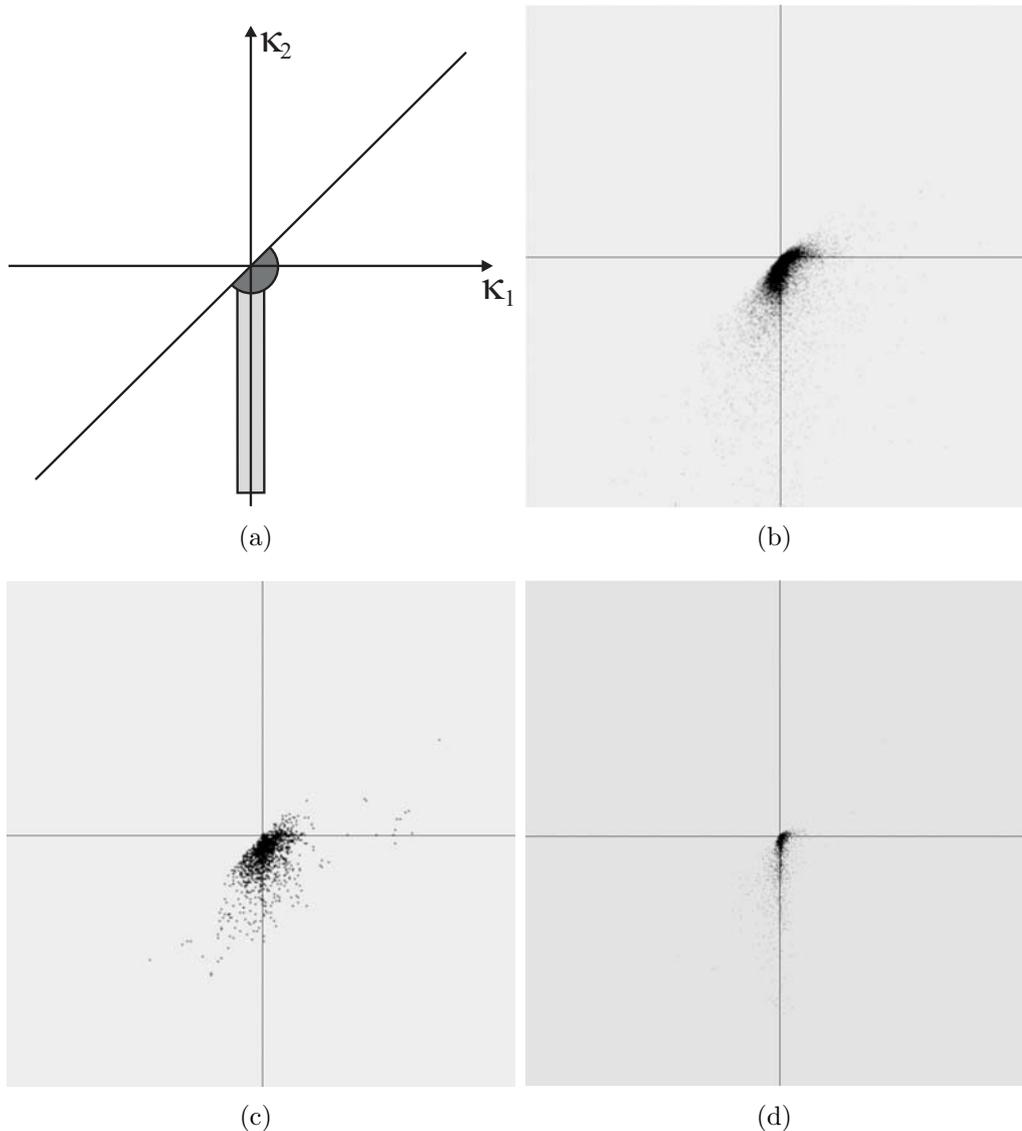


Abbildung 5.6: Verteilungsbeschreibung, (κ_1, κ_2) Histogramm auf Muskeloberfläche für verschiedene Oberflächenbeschreibungen derselben Struktur (a) erwartete Verteilung, Kennzeichnung der Regionen für schwach konkav und konvexe Bereich durch dunkle Einfärbung, Kennzeichnung stark konvexer zylindrischer Bereiche durch hellgrau, (b) Verteilung für Muskelmodell (5000 Punkte), Verteilung Muskelmodell (1500 Punkte) (c) ParametricOP $r = 1$, (c) BiQuadBezOP, $r = 3$, Annäherung an erwartete Verteilung bei Verwendung erweiterter Nachbarschaft

Weiterhin kann aufgrund der Annahmen und tatsächlichen vorhandenen Verteilung der Hauptkrümmungswerte noch auf Identifikation der stark konvexen zylindrischen Punkte durch hohe κ_2 Werte geschlossen werden. Dies bestätigt die in Abb. 5.7 gezeigte Farbabbildung von κ_2 .

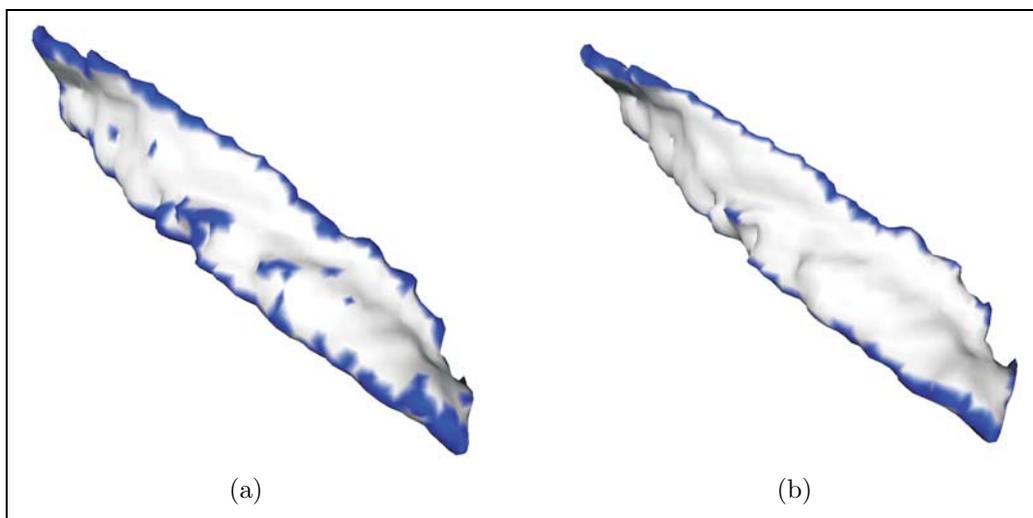


Abbildung 5.7: Muskeloberfläche Krümmungsapproximation durch quadratisches Fläche topologischer Radius 1 (a) und Radius 2 (b) Kennzeichnung von Punkten mit $(-3 \leq \kappa_2 \leq -0.2)$

Ein weiteres Beispiel zur Ermittlung bzw. Überprüfung von globaler Eigenschaften anhand der auftretenden Krümmungsverteilung wird in Abb. 5.8(a) gezeigt. Die konvexe zylindrische Struktur lässt eine Verteilung der Krümmungswerte nahe der negativen κ_2 -Achse vermuten. Eine solche Verteilung tritt aber erst bei der Anwendung eines Verfahrens mit erweiterter topologischer Nachbarschaft auf (Abb. 5.8(d)).

Grund für die Abweichung der Verteilung von Krümmungswerten, die mit Hilfe einer $star(P_i)$ Nachbarschaft erzeugt wurden, ist die unregelmäßige Gitterstruktur, d.h. großen Unterschiede bzgl. des Flächeninhaltes benachbarter Dreiecke, in Verbindung mit relativ stark variierenden Normalen innerhalb der kleinen Dreiecke.

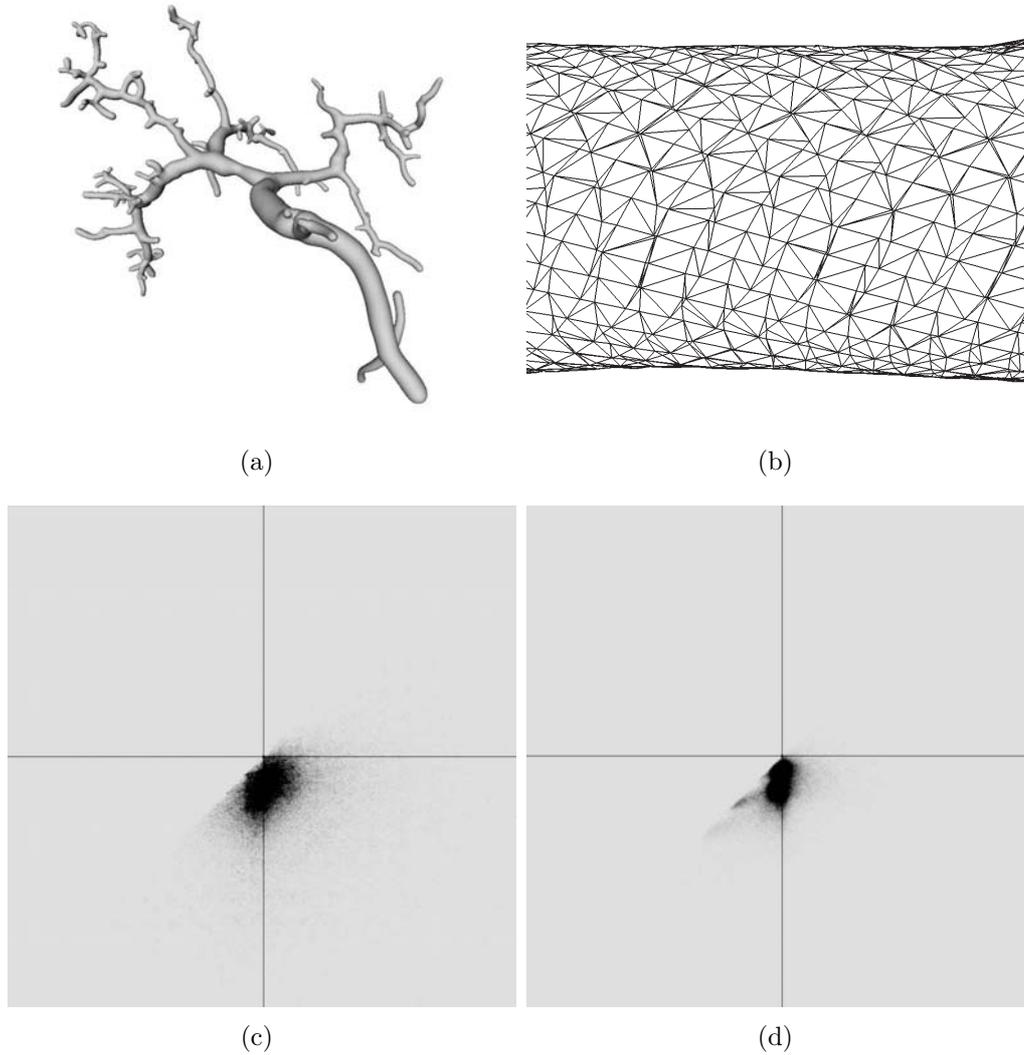


Abbildung 5.8: Verteilung erwartete globale zylindrische Struktur, (a) Gefäßbaum mit konvexer zylindrischer Oberfläche, (b) Beschreibung der unregelmäßigen Gitterstruktur, (c) κ_1, κ_2 -Histogramm für ParametricOP mit topologischem Radius $r = 1$, (d) κ_1, κ_2 -Histogramm für QuadraticOP mit topologischem Radius $r = 2$ mit erwarteter Verteilung

5.2 Auswertung der durchgeführten Untersuchungen

Für die durchgeführte Untersuchung der vorhandenen Verfahren mit dem Ziel Aussagen bzgl. deren Anwendbarkeit zu treffen, wurden die in Tab. 5.1 aufgeführten Oberflächenbeschreibungen untersucht. Diese unterscheiden sich z.B. durch die Anzahl auftretender degenerierte Punkte oder der Möglichkeit globale Krümmungseigenschaften zu formulieren. Bei der daran anschließenden Auswertung konnten eine Reihe der auftretenden Unterschiede mit Hilfe der entwickelten Werkzeuge analysiert werden.

Modell	Anzahl von Punkten	degenerierte Punkte
Carotis	1408	0
Sternomastoides	10066	5
Schädel	82714	157
Gefäßbaum	154624	0

Tabelle 5.1: Charakterisierung der Daten auf denen Krümmung bestimmt wurde

In Tab. 5.2 werden die benötigten Berechnungszeiten auf den Modellen für die jeweiligen Verfahren aufgeführt.

	Schädel	Muskel	Carotis	Gefäßbaum
NormalOP	11,8	1,4	0,2	22,0
TaubinOP	8,0	0,9	0,1	15,2
QuadraticOP	11,7	1,3	0,2	22,2
CubicOP	21,2	2,5	0,3	40,3
ParametricOP	15,4	1,8	0,3	29,0
MaubeugeOP	16,6	1,9	0,3	32,7
BiQuadBezOP	26,7	3,2	0,4	49,2
QuadraticOP	73,5	9,2	1,2	123,6
CubicOP	99,9	12,3	1,6	164,1
BiQuadBezOP	313,9	41,2	4,8	497,8

Tabelle 5.2: benötigte Zeit in Sek. zur Krümmungsapproximation auf allen Punkten des entsprechenden Modells, im unteren Teil werden Zeiten für die Krümmungsbestimmung einer erweiterten Nachbarschaft, d.h. topologischer Radius $r = 3$, angegeben

Die unterschiedlichen Berechnungszeiten resultieren aus den notwendigen Parametrisierungen und den zu lösenden Gleichungssystemen bei der Anwendung der einzelnen Verfahren. So ist eine Ursache für die kurzen Zeiten des TaubinOP dessen Anwendung ohne das Lösen von Gleichungssystemen. Anhand der Werte in Tab. 5.2 kann als Ursache für die benötigten Zeiten die Komplexität der zu lösenden Gleichungssysteme angenommen werden. So sind zur Krümmungsapproximation durch

Bezierflächen Gleichungssysteme für die Parametrisierung und Passflächenerzeugung zu lösen, woraus dann die langen Zeiten resultieren.

Die Anwendung der Krümmungsoperatoren für Nachbarschaften mit topologischem Radius $r = 1$ liefert im Vergleich zu den Zeiten für erweiterte Nachbarschaften schnell die gesuchten Ergebnisse. Innerhalb der Datensatz wurden nicht-parametrisierbare Umgebungen festgestellt (Abb. 5.9).

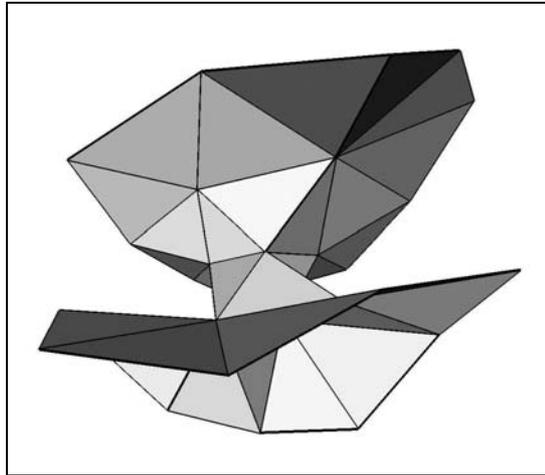


Abbildung 5.9: Beispiel einer Umgebung innerhalb des Schädelmodells mit topologischem Radius $r = 2$, die durch die zur Verfügung stehenden Verfahren, d.h. Projektion oder Abbildung nach [ECK et al., 1995], nicht parametrisierbar ist, da $nhd(P_i)$ durch 2 Randkurven begrenzt wird

Bei der lokalen Untersuchung der Verfahren wurden unter anderem starke Abweichungen des CubicOP von Werten anderer Verfahren festgestellt. Hierfür ist das Auftreten von Normalen mit negativen z-Komponenten schon innerhalb der *star* Nachbarschaften verantwortlich.

Auch unter der Bedingung, dass die Normalen in lokalen Koordinaten eine positive z-Komponente besitzen, ist die Erzeugung einer geeigneten Passfläche zur Abschätzung der Krümmungswerte an einem Gitterpunkt nicht immer möglich (Abb. 5.10). Hier kann es aufgrund kleiner positiver z-Komponenten zu unerwarteten Ergebnissen kommen, da diese Normalenkomponenten den Verlauf der erzeugten Fläche stark beeinflussen. Somit muss beim Einsatz des CubicOP dessen sensitives Verhalten in Bereichen mit stark variierenden Normalen beachtet werden.

Anhand der Hauptkrümmungswerte bzw. der Gauß'schen Krümmung ist die Umgebung eines Punktes als hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch charakterisierbar. Beim Vergleich dieser geometrischen Eigenschaft eines Punktes, durch die Untersuchung der entsprechenden Krümmungsgrößen wurden für einige Punkte Unterschiede festgestellt (Abb. 5.11). So kann durch die Erzeugung von quadratischen Passflächen anhand eines *Least Square* Verfahrens eine starke Abweichung von einer

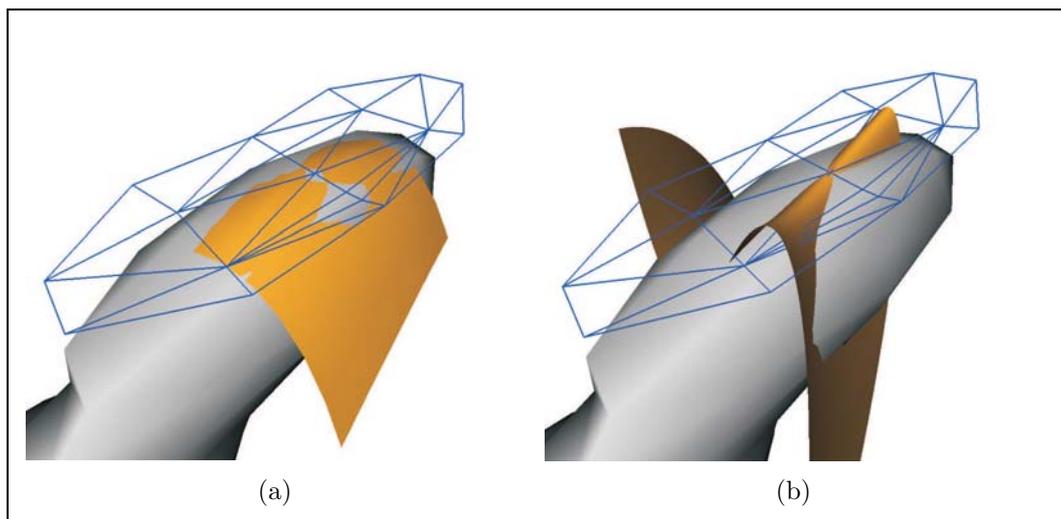


Abbildung 5.10: Beschreibung der Sensitivität der Approximation von Krümmungsinformation durch Vergleich von quadratischer und kubischer, d.h. normalenabhängiger, Passfläche nach [GOLDFEATHER, 2001], wobei die innerhalb der Parametrisierung (topologischer Radius $r = 2$) verwendeten Normalen keine negative z-Komponente bzgl. lokaler Koordinaten besitzen, (a) quadratische Passfläche (b) Passfläche mit Beachtung der Normalen

erwarteten Umgebungsbeschreibung auftreten. In diesem Fall wird der quadratische Abstand zwischen tatsächlichen Punkten und entsprechenden Punkten auf der Passfläche zwar minimiert, aber die erzeugte Fläche und damit die Krümmungswerte entsprechen nicht den angenommenen Werten.

Für den in Abb. 5.11 gezeigten Punkt lieferten die *Curve Fitting* Verfahren die erwarteten Hauptkrümmungswerte, d.h. der Punkt wurde als elliptisch erkannt.

Weiterhin konnte durch einen Vergleich von Krümmungswerten festgestellt werden, dass im Fall von unterbestimmten Gleichungssystemen zur Lösung eines *Least Squares* Verfahrens ebenfalls eine Abweichung der Ergebnisse von den zu erwartenden Krümmungswerten auftreten kann (Abb. 5.12).

Für die in Abb. 5.12(a) beschriebene Umgebung stimmen die Werte der *Curve Fitting* Verfahren sowie die Ergebnisse einer Krümmungsbestimmung durch quadratischer bzw. kubischer Passfläche mit den erwarteten Krümmungswerten überein, d.h. anhand der Hauptkrümmungswerte wird ein schwach elliptischer Punkt beschrieben.

Weiterhin gilt für die Verfahren, die eine projektive Parametrisierung zur Ermittlung der Krümmungsinformation verwenden, dass korrekte topologischen Abbildungen, zur Generierung der Passflächen bzw. Abschätzung der Normalenkrümmung, auf den verwendeten Oberflächen nicht garantiert werden kann. Diese Punktumgebungen sind unter anderem durch große Unterschiede zwischen den auftretenden Normalen gekennzeichnet (Abb. 5.13).

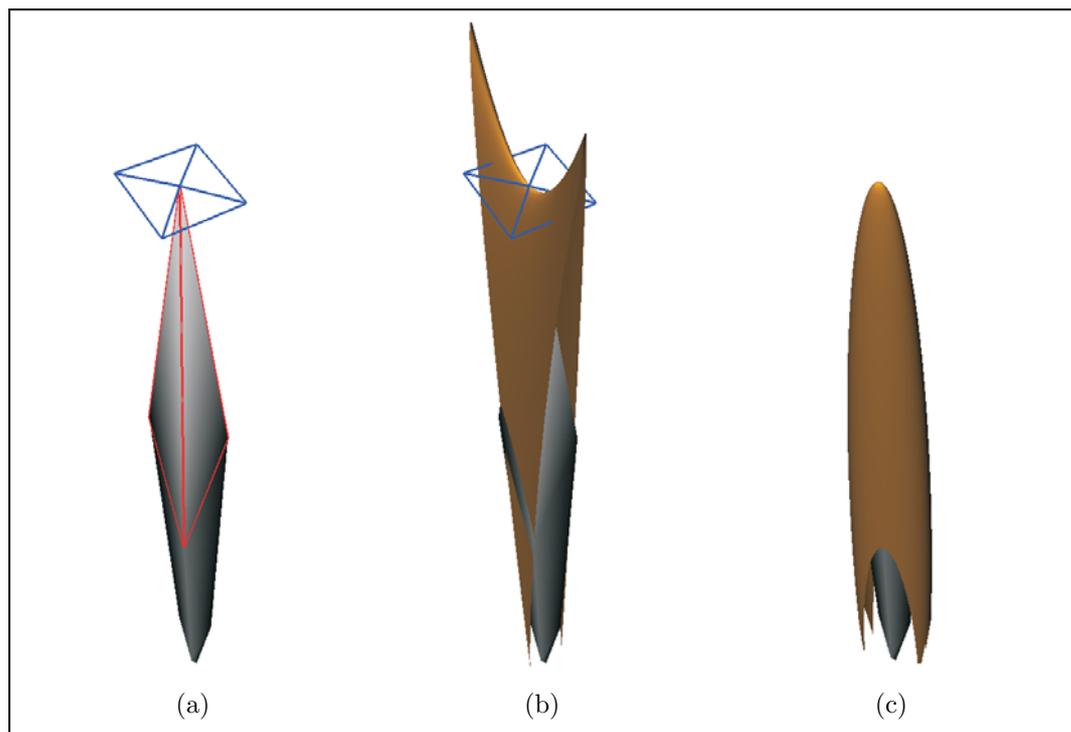


Abbildung 5.11: Vergleich der bestimmten *fitting* Geometrien für einen scheinbar elliptischen Punkt, (a) Punkt gekennzeichneten Nachbarknoten sowie der Angabe der verwendeten hier topologisch korrekten projektiven Parametrisierung (b) erzeugte quadratische Passfläche, die hyperbolischen Charakter besitzt $\kappa_1 = 1209.0, \kappa_2 = -60.2$ (c) Bestimmung einer parametrischen Passfläche nach [Rössl et al., 2000b] mit elliptischem Charakter $\kappa_1 = 3.81, \kappa_2 = 2.02$

In Tab. 5.3 werden die festgestellten Vor- und Nachteile der umgesetzten Verfahren zusammengefasst. Hierbei bezeichnet p_{min} die erforderliche Anzahl von Punkten innerhalb $nhd(P_i)$ um eine eindeutige Krümmungsapproximation durch das Verfahren zu garantieren.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass bei der Bestimmung von Krümmungsinformation, die Auswahl eines Verfahrens in Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte innerhalb von $nhd(P_i)$ sowie von topologischen Eigenschaften der verwendeten Parametrisierung getroffen werden sollte. Im Fall der Verwendung einer topologisch nicht korrekten Parametrisierung waren Abweichungen von zu erwartenden Krümmungswerten festzustellen. Weiterhin ist die Eindeutigkeit einer Krümmungsinformation abhängig von der zur Verfügung stehenden Information bzgl. des beschriebenen Oberflächenverlaufs durch $nhd(P_i)$. So ist im Fall von unterbestimmten Gleichungssystemen für eine Krümmungsapproximation durch die Erzeugung einer biquadratischen Bezierfläche die ermittelte Krümmungsinformation zu überprüfen. Für unterbestimmte Gleichungssysteme bei der Krümmungsberechnung durch den ParametricOP, d.h. nach [Rössl et al., 2000b], konnten vergleichbare Abweichungen von Erwartungswerten nicht festgestellt werden.

Approximationsverfahren	p_{min}	Beurteilung
NormalOP	3	+schnelles Verfahren – * Verwendung projektiver Parametrisierung, d.h. Überprüfung topologischer korrekter Parametrisierung, zur Garantie guter Approximationswerte
TaubinOP	3	+schnellstes Verfahren +keine Lösung von Gleichungssystemen erforderlich – wie *
QuadraticOP	3	+schnelles Verfahren +Verwendung erweiterter Nachbarschaften – wie *
CubicOP	3	–eingeschränkte Anwendung zur Untersuchung erweiterter Nachbarschaften – wie *
ParametricOP	5	+schnelles Verfahren +gute Ergebnisse innerhalb der <i>star</i> -Nachbarschaft, da immer eine topologieerhaltende Parametrisierung verwendet wird
MaubeugeOP	3	+Bestimmung skalarer Krümmungswerte ohne Erzeugung einer projektiven Parametrisierung –Abschätzung der Hauptkrümmungsrichtungen wie *
BezierQuadOp	9	–rechenaufwendiges Verfahren, da sowohl zur Parametrisierung und Bestimmung der Kontrollpunkte i.a. ein überbestimmtes Gleichungssystem zu lösen ist +Anwendung topologieerhaltender Parametrisierung +sehr flexibel bei der Beschreibung der Umgebung, da 27 Koeffizienten zur Bestimmung der Passfläche bestimmt werden

Tabelle 5.3: Beurteilung der umgesetzten Approximationsverfahren

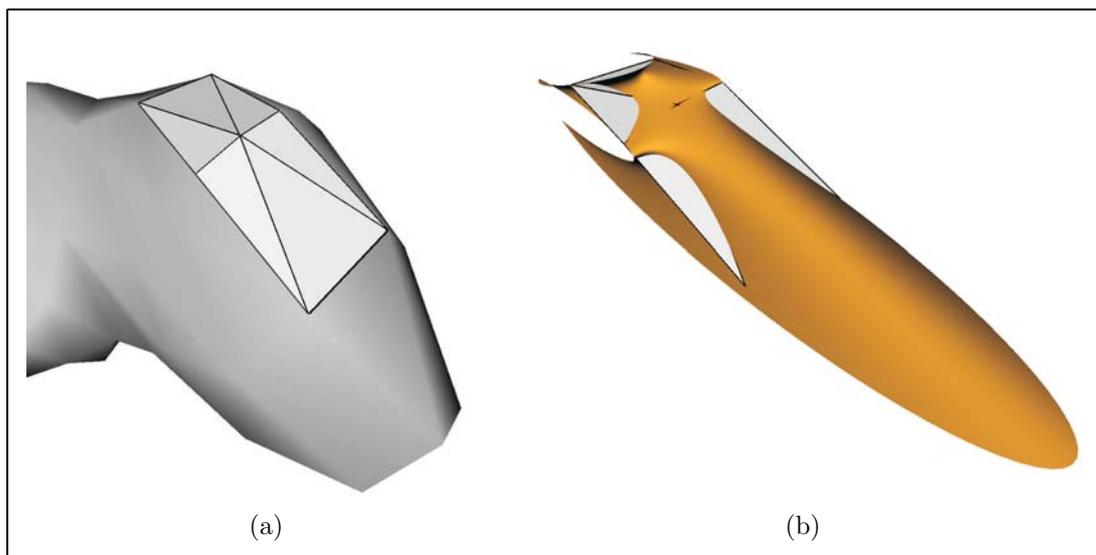


Abbildung 5.12: Berechnung einer Passfläche durch unterbestimmtes Gleichungssystem, Beziermethode benötigt 9 Punkte zur eindeutigen Lösungsbestimmung, (a) Punktumgebung mit 4 Nachbarn, (b) ermittelte biquadratische Passfläche, mit $\kappa_1 = 0.15$, $\kappa_2 = -0.43$, d.h. Annahme einer hyperbolischen Umgebung im Gegensatz einer erwarteten elliptischen bzw. schwach zylindrischen Umgebung des Punktes

So ist eine geeignete Bestimmung von Krümmungsinformation für $star(P_i)$ mit weniger als 5 Punkten und topologisch-korrekt projekti ver Parametrisierung unter anderem durch *Curve Fitting* möglich. Bei der Berechnung von Krümmungsgrößen durch eine quadratische bzw. kubische Passfläche, ist die Erzeugung nicht geeigneter Passflächen zu beachten. Einerseits können Normalen mit negativen z-Komponenten in lokalen Koordinaten, trotz topologisch korrekter projekti ver Parametrisierung auftreten. Andererseits ist eine geeignete Beschreibung der Umgebung eines Oberflächenpunktes durch die Erzeugung einer quadratischen Passflächen in Einzelfällen nicht möglich. Eine Krümmungsberechnung für diese Umgebungen, d.h. $star(P_i)$ mit weniger als 5 Punkten, entspricht dann i.a. der Suche nach einer eindeutig bestimmbar en Lösung eines *Least Squares* Problems. Kann diese projekti ve Parametrisierung nicht erzeugt werden, sind die skalaren Krümmungsgrößen durch den MaubeugeOP berechenbar (Tab. 5.3).

Für 5 und mehr Punkte innerhalb von $star(P_i)$ sollte der *ParametricOP* verwendet werden, da jetzt die Verwendung einer korrekten topologischen Parametrisierung und die Eindeutigkeit der Passflächebeschreibung garantiert ist. Dieser Operator ist i.a. auch für $star(P_i)$ Umgebungen mit weniger als 5 Punkten geeignet.

Die Krümmungsbestimmung für erweiterte Nachbarschaften mit korrekter projekti ver Parametrisierung kann durch den *QuadraticOP* erfolgen. Dieser liefert schnell die gesuchte Krümmungsinformation. Der Einsatz des *BezierQuadOp* hingegen ist rechenaufwendiger, dafür wird eine topologisch korrekte Parametrisierung zur Er-

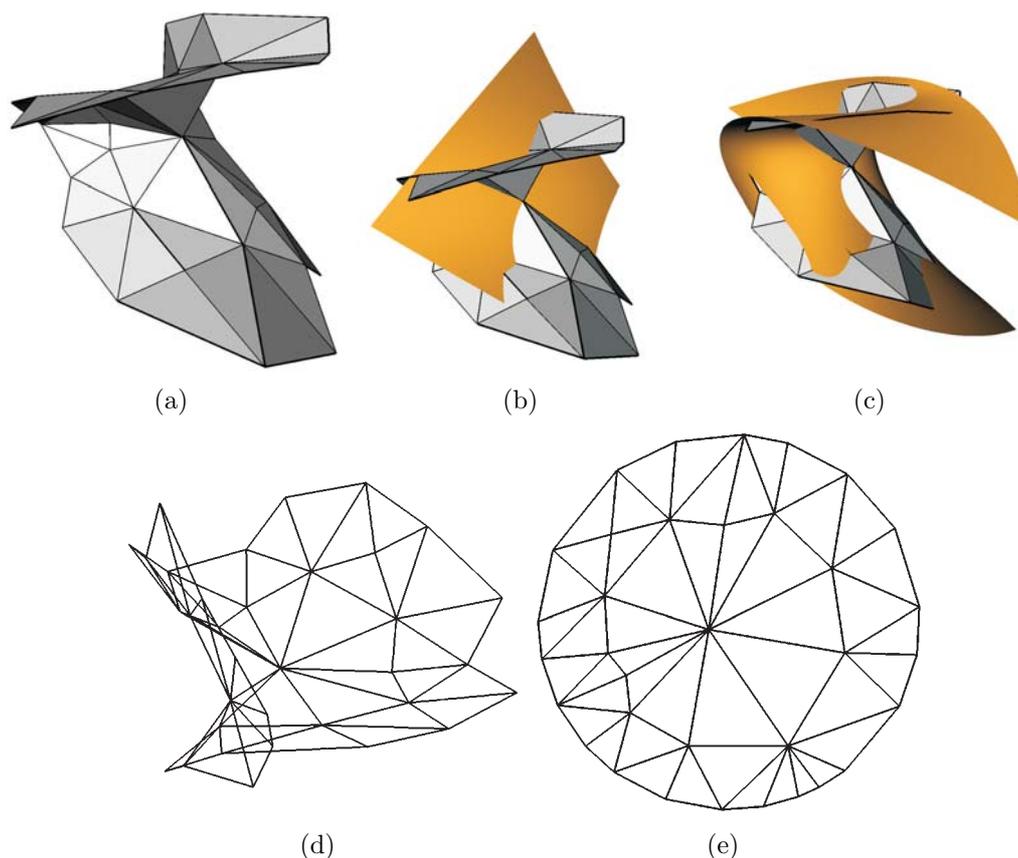


Abbildung 5.13: Approximationsverhalten der Passflächen für einen Punkt P_i auf dem Schädelmodell mit erweiterter Umgebungen (a), $nhd(P_i)$ mit topologischem Radius $r = 2$, (b) quadratische Passfläche ($\kappa_1 = 0.1, \kappa_2 = -0.3$), (c) biquadratische Bezierfläche ($\kappa_1 = 0.4, \kappa_2 = -0.8$), (d) topologisch inkorrekte projektive Parametrisierung, (e) topologisch korrekte Parametrisierung nach [ECK et al., 1995], bessere Beschreibung der hyperbolischen Umgebung anhand der Hauptkrümmungswerte von BiQuadBezOP

zeugung der Passfläche garantiert. Weiterhin liefert dieser Operator Krümmungsinformation, die anhand eines flexibleren Modells der Oberfläche bestimmt wird. Die zur Verfügung stehenden Datensätze enthalten komplexe und einfache Oberflächen. Komplexe Oberflächen enthalten im Gegensatz zu einfachen Geometrien eine Vielzahl Punkten mit ausgeprägter hyperbolischer, parabolischer und elliptischer Umgebung (Abb. 2.3), z.B. Schädel oder Carotis. Diese Modelle sind unter anderem durch das Auftreten von Spitzen, Furchen und Kanten gekennzeichnet. Zur Krümmungsapproximation auf komplexen Modellen haben sich Verfahren mit topologierhaltender Parametrisierung bewährt, d.h. die Abweichung von zu erwartenden Krümmungswerten war geringer als im Vergleich zu Verfahren die eine projektive Parametrisierung verwenden.

Für einfache Strukturen, z.B. Gefäßbaum und Muskeln, hingegen konnten durch Verfahren mit projektiver Parametrisierung geeignete Krümmungswerte ermittelt

werden. Für diese Modelle ist also die Anwendung dieser schnelleren Verfahren möglich.

Eine Vorverarbeitung zur effizienten Berechnung geeigneter Krümmungsinformation, kann durch eine Überprüfung der verfahrensabhängigen Voraussetzungen an einem Punkt P_i erreicht werden. Dies entspricht einer Untersuchung der Punktumgebungen im Hinblick auf die Anwendbarkeit des Verfahren, d.h. ob eine topologisch korrekte Parametrisierung möglich ist oder aber inwieweit sich die Krümmungsinformationen verschiedener Verfahren unterscheiden. Auch durch die vorherige Berechnung von Nachbarschaftsbeschreibungen $nhd(P_i)$ ist eine effizientere Anwendung der Verfahren möglich. Hierzu wäre eine geeignete Datenstruktur oder die Definition eines Dateiformats erforderlich, um schnelle Zugriffe auf die ermittelte Information, wie z.B. Topologie, Parametrisierung, usw., zu garantieren.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Innerhalb dieses Kapitels werden die wichtigsten Ergebnisse nochmals zusammengefasst und Anregungen für die Weiterentwicklung der umgesetzten Verfahren und Analysetechniken gegeben.

6.1 Fazit

Zielstellung der Arbeit war die Untersuchung verschiedener Methoden zur Approximation von Krümmungsinformation im Hinblick auf deren Anwendbarkeit für klinische Datensätze, für die im Gegensatz zu klassischen Modellen aus der Geometrie keine quantitativen sondern nur qualitative Krümmungseigenschaften vorliegen. Motivation für eine Krümmungsapproximation war einerseits die Möglichkeit, mit dieser Information die Umsetzung krümmungsbasierter illustrativer Techniken zu unterstützen, sowie die Anwendung krümmungsabhängiger Modellierungs- und Analyseverfahren. Andererseits kann durch die Anwendung unterschiedlicher Verfahren zur Krümmungsapproximation auch eine Überprüfung qualitativer Aussagen bzgl. zu erwartender Krümmungseigenschaften anhand von quantitativer Krümmungsinformation erfolgen. Voraussetzung für diese Anwendungen ist die Bestimmung von Krümmungsinformation.

Innerhalb dieser Arbeit wurden Verfahren zur Krümmungsapproximation auf klinischen Daten getestet und analysiert. Zur Bewertung dieser Verfahren auf nicht-analytischen Modellen wurden unter anderem zu überprüfende Eigenschaften vorgestellt. Es wurden sieben Verfahren zur Krümmungsapproximation, ein Verfahren zur Glättung von Orientierungsfeldern und eine Reihe von Analysetechniken in eine bestehende Entwicklungsumgebung integriert. Die umgesetzten Verfahren zur Krümmungsapproximation wurden auf realen klinischen Daten getestet, stabile und schnelle Krümmungsberechnungen auf einfachen und komplexen Oberflächen können jetzt durchgeführt werden. Die bereits durchgeführte Analyse der ermittelten Krümmungswerte hat gezeigt, dass sich die Verfahren unterschiedlich gut zur Bestimmung von Krümmungsinformation auf diesen Daten eignen. Hierbei werden dann erste Empfehlungen für die zu verwendenden Berechnungsverfahren auf klinischen Daten gegeben. Diese Empfehlungen sind das Ergebnis einer Untersuchung lokaler Eigenschaften, d.h. welche Bedingungen müssen an einem Punkt erfüllt sein, damit durch ein Verfahren eine geeignete Krümmungsapproximation garantiert werden kann. Zur Beurteilung wurden die entwickelten Werkzeuge zur Analyse von ap-

proximierter Krümmungsinformation genutzt. Weiterhin können die entwickelten Analysetechniken zur Überprüfung qualitativer Aussagen bzgl. der Krümmungseigenschaften genutzt werden. Dies wurde an einigen Beispielen demonstriert. Die jetzt anwendbaren Routinen bilden sowohl die Grundlage für die Durchführung weiterer Untersuchungen bzgl. der Güte approximierter Krümmungsgrößen und zur Umsetzung krümmungsbasierter Illustrations-, Analyse- und Modellierungsverfahren, z.B. die Erzeugung von Schraffurlinien, anisotropes Glätten von Oberflächenbeschreibungen usw..

6.2 Ausblick

Eine mögliche Verbesserung zur Bewertung besteht in der Umsetzung von weiteren Techniken zur Unterstützung der lokalen Analyse. Hierdurch könnte eine effizientere Beurteilung der Krümmungswerte erreicht werden. Für eine lokale Analyse wären somit Navigationshilfen zur Lokalisation von zu untersuchenden Krümmungswerten zu entwickeln, um die Suche innerhalb eines Modells nach Punkten mit krümmungsrelevanten Eigenschaften zu beschleunigen. Durch die Anwendung von Selektionstechniken zur Beschreibung einer Menge von Punkten innerhalb eines 1D- oder 2D-Histogramms wäre eine effektive Kennzeichnung von Punkten mit ähnlichen Verteilungseigenschaften möglich. Durch Selektionstechniken für Punktmengen innerhalb von 3D-Szenen ist unter anderem eine effiziente Beschreibung einer Menge von Punkten mit erwarteten gleichen geometrischen Eigenschaften möglich.

Zur Beschleunigung der lokalen Analyse geometrischer Eigenschaften eines Punktes wäre die automatische Transformation der entsprechenden Vergleichsgeometrie in die Nähe des zu untersuchenden Punktes hilfreich.

Eine Erweiterung der Analysetechniken wäre aber auch durch die Umsetzung neuer Verfahren zur Beurteilung von Krümmungsinformation denkbar. Hierfür wäre unter anderem die Definition von weiteren zu überprüfenden ergebnis- und verfahrensabhängigen Eigenschaften. So könnten durch Beurteilungen der Krümmungsverfahren bzgl. der zugrundeliegenden Gitterstruktur, ein Begriffssystem entwickelt werden, um die auftretenden Gitterstrukturen zu unterscheiden. Krümmungsverfahren sind auch zur Erzeugung von Flächen einsetzbar, somit ist zu untersuchen, ob sich 2-manigfaltige Umgebungen für degenrierte Bereiche der Oberfläche aufgrund der ermittelten Krümmungsinformation angrenzender Punkte konstruieren lassen. Eine andere Variante 2-manigfaltigen Punktumgebungen zu garantieren, ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Oberflächengenerierung, das keine degenerierten Punkte zulässt. Die Untersuchung der verfahrensabhängigen Eigenschaften hat gezeigt, dass mit den vorhandenen Verfahren nicht alle Umgebungen parametrisierbar sind. Durch die Umsetzung von Methoden zur Identifikation und Parametrisierung dieser Umgebungen könnten Krümmungsinformation auch für diese Nachbarschaften Krümmungsgrößen berechnet werden. Auch die Beschreibung einer Umgebung mit

geodätischer Metrik kann zur Bestimmung weiterer Krümmungsinformation verwendet werden.

Da tangentielle Vektorfelder Voraussetzungen für die Generierung von Schraffurlinien sind, müssen Verfahren entwickelt werden die solche Felder anhand der gegebenen Orientierungen an einem Punkt erzeugen. Zur quantitativen Bewertung eines tangentialen Vektorfeldes sind dann entsprechende Vektorfeldgrößen zu bestimmen, die eine Beurteilung bzgl. der Eignung eines tangentialen Vektorfeldes zur Schraffurliniengenerierung ermöglichen.

Neben der Erweiterung durch Interaktionstechniken und der Berechnungsverfahren ist auch bei der Anwendung umgesetzter Methoden zur Krümmungsapproximation zu entscheiden, ob ein adaptives Verfahren eine verbesserte Krümmungsbestimmung möglich ist, d.h. die Auswahl eines Verfahrens abhängig von charakteristischen Merkmalen einer Punktumgebung.

Das Ziel der Arbeit, Krümmungsberechnung auf realen klinischen Daten durchführen zu können, sowie die Untersuchung inwieweit sich die beschriebenen Methoden zur Krümmungsapproximation auf den Oberflächenmodellen anatomischer Strukturen eignen, wurde erreicht. Weiterhin wurde im Ausblick gezeigt, dass mit Hilfe der umgesetzten Verfahren die Entwicklung von Darstellungs- und Analysetechniken möglich ist, die die Untersuchung klinischer Daten entscheidend verbessern können.

A Bilder

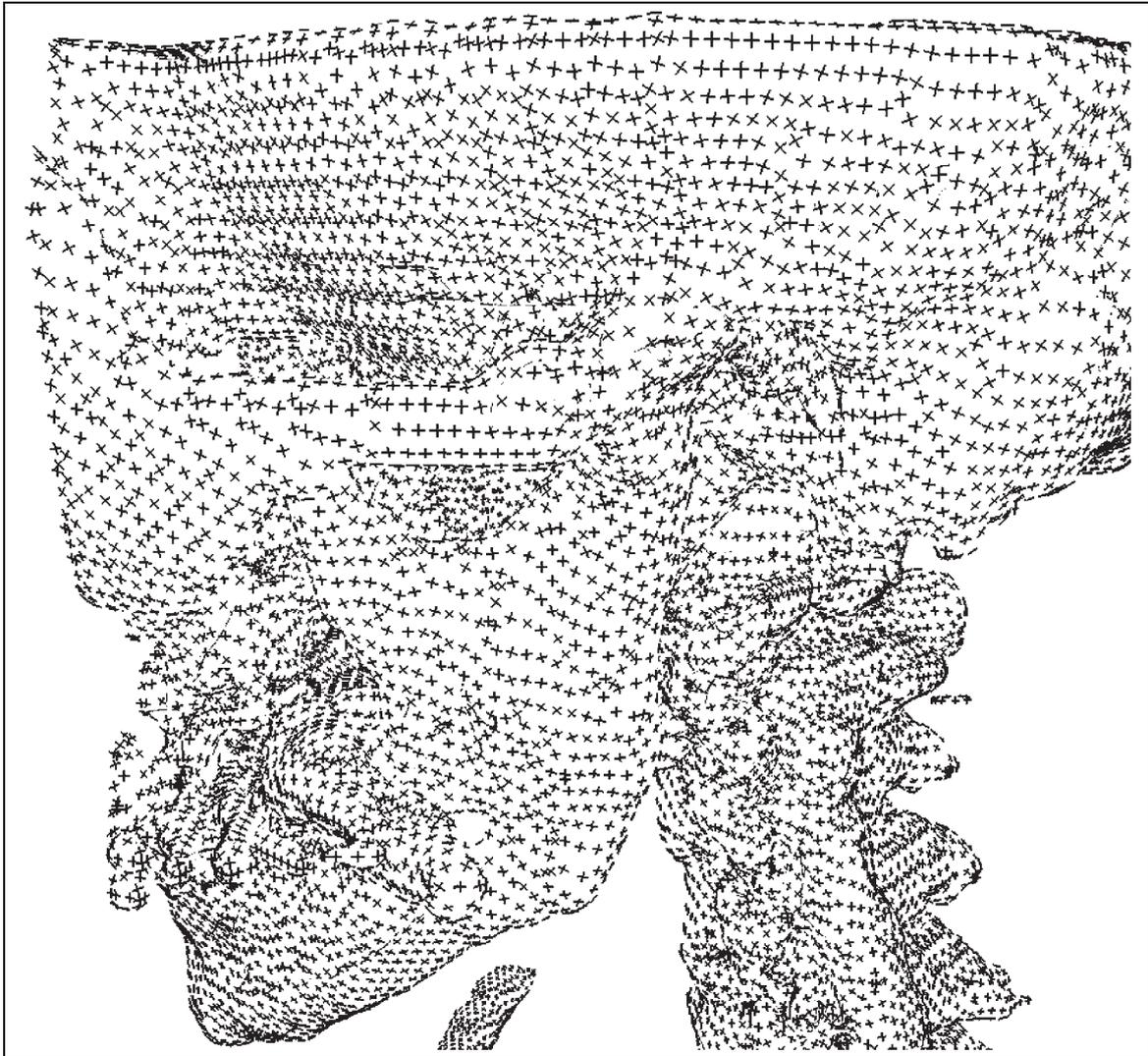


Abbildung A.1: Beschreibung eines Orientierungsfeldes entlang der approximierten Hauptkrümmungsrichtungen auf dem Schädelmodell

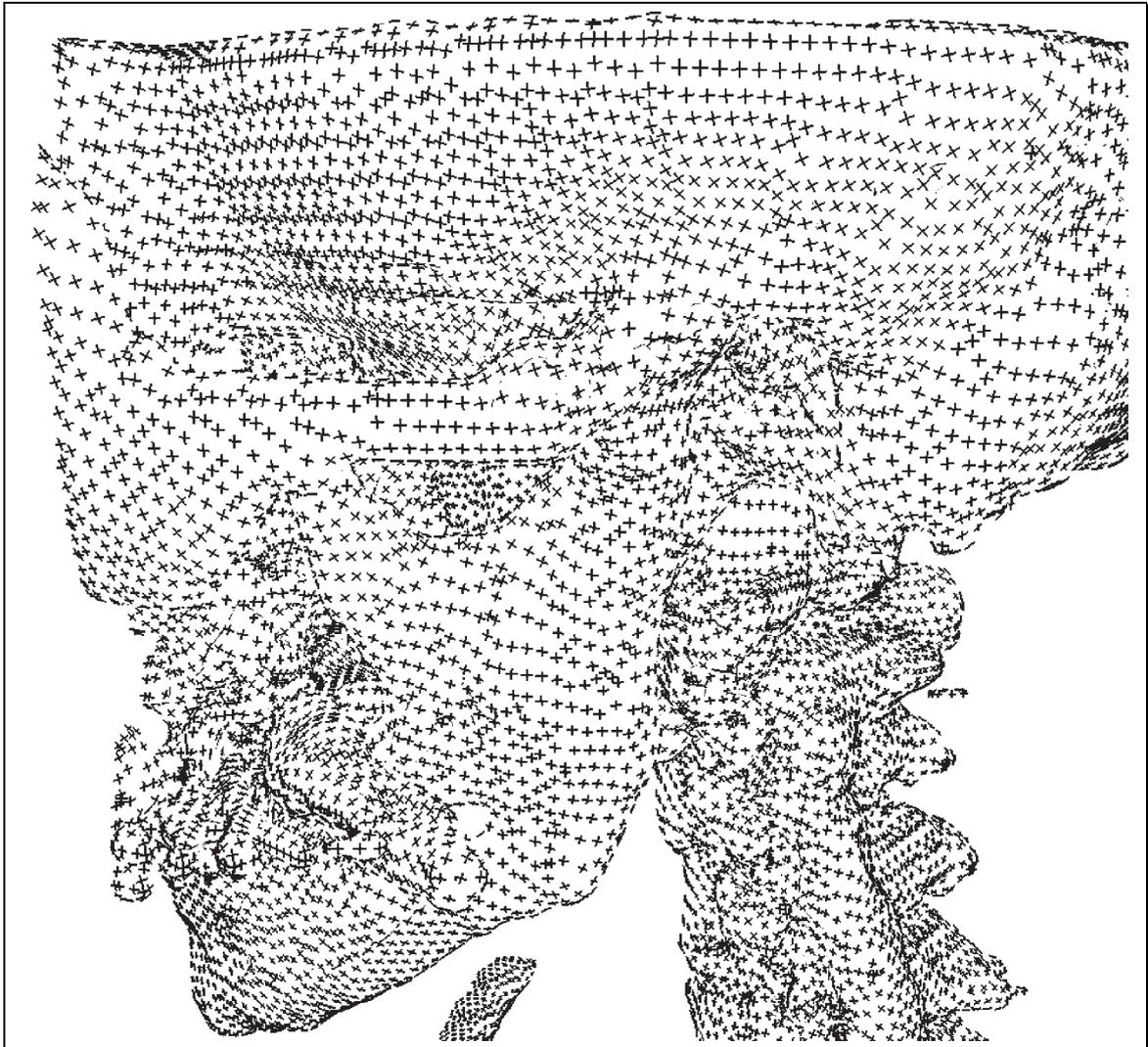


Abbildung A.2: Beschreibung eines geglätteten Orientierungsfeldes nach [HERTZMANN und ZORIN, 2000] auf dem Schädelmodell

Literaturverzeichnis

- Ed Anderson. *LAPACK users' guide*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- Ed Anderson. *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*. Boston, Birkhäuser, 1997.
- MyungSoo Bae Anshuman Razdan. Curvature estimation scheme for triangle meshes using biquadratic bezier patches. Forschungsbericht, PRISM and Department of Computer Science and Engineering, Arizona State University, 2005.
- Alan H. Barr, Mathieu Desbrun, Mark Meyer, und Haeyoung Lee. Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds. *VisMath, Berlin (Germany)*, 2002.
- Bruce G. Baumgart. Winged edge polyhedron representation. Techreport, Stanford University, 1972.
- Alexander G. Belyaev, Alexander A. Pasko, und Tosiyasu L. Kunii. Ridges and ravines on implicit surfaces. Seiten 530–535, 1998.
- Mark J. Bentum, Barthold B. A. Lichtenbelt, und Tom Malzbender. Frequency analysis of gradient estimators in volume rendering. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(3):242–254, 1996.
- Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, und Alan H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. *Computer Graphics*, 33 (Annual Conference Series):317–324, 1999.
- Manfredo P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, 1994.
- Matthias Eck, Tony DeRose, Tom Duchamp, Hugues Hoppe, Michael Lounsbery, und Werner Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series):173–182, 1995.
- James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, und John Hughes. *Computer Graphics Principles and Practice*. Addison-Wesley, 1997.

- Georg K. Francis. *A Topological Picturebook*. Springer Verlag New York, 1987.
- Ahna Girshick, Victoria Interrante, Steven Haker, und Todd Lemoine. Line direction matters: an argument for the use of principal directions in 3d line drawings. In *NPAR '00: Proceedings of the 1st international symposium on Non-photorealistic animation and rendering*, Seiten 43–52, New York, NY, USA, 2000. ACM Press.
- Jack Goldfeather. Understanding Errors in Approximating Principle Direction Vectors. Forschungsbericht, Department of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, 2001.
- Amy Gooch und Bruce Gooch. *Non-Photorealistic Rendering*. Natick: AK Peters, Ltd, 2001.
- Horst K. Hahn, Florian Link, und Heinz-Otto Peitgen. Concepts for Rapid Application Prototyping in Medical Image Analysis and Visualization. Seiten 283–298, 2003.
- Aaron Hertzmann und Denis Zorin. Illustrating Smooth Surfaces. In *SIGGRAPH '00: Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, Seiten 517–526, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- Jiri Hladuvka. *Derivative and Eigensystems for Volume-Data Analysis and Visualization*. Dissertation, Technische Universität Wien, 2001.
- John F. Hughes. Differential Geometry of Implicit Surfaces in 3-Space - A Primer. Forschungsbericht, Department of Computer Science Brown University Providence, Rhode Island 02912, 2003.
- Victoria Interrante, Henry Fuchs, und Stephen Pizer. Illustrating transparent surfaces with curvature-directed strokes. In *VIS '96: Proceedings of the 7th conference on Visualization '96*, Seiten 211–ff., Los Alamitos, CA, USA, 1996. IEEE Computer Society Press.
- Gordon Kindlmann. Curvature-Based Transfer Functions for Direct Volume Rendering: Methods and Applications. *IEEE Conference on Visualization '03*, 2003.
- Wayne Tiller Les Piegl. *The NURBS book*. Berlin, Springer, 1995.
- Gabriele Lohmann. *Volumetric Image Analysis*. Wiley and Teubner, 1998.
- Stephen R. Marschner und Richard J. Lobb. An evaluation of reconstruction filters for volume rendering. In *VIS '94: Proceedings of the conference on Visualization '94*, Seiten 100–107, Los Alamitos, CA, USA, 1994. IEEE Computer Society Press.

- Torsten Möller, Raghu Machiraju, Klaus Mueller, und Roni Yagel. Evaluation and Design of Filters Using a Taylor Series Expansion. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(2):184–199, 1997. ISSN 1077-2626. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/2945.597800>.
- D. L. Page, Y. Sun, A. F. Koschan, J. Paik, und M. A. Abidi. Normal vector voting: crease detection and curvature estimation on large, noisy meshes. *Graph. Models*, 64(3/4):199–229, 2002.
- Konrad Polthier. *Polyhedral Surfaces of Constant Mean Curvature*. Dissertation, Freie Universität Berlin, 2002.
- Emil Praun, Adam Finkelstein, und Hugues Hoppe. Lapped textures. In *SIGGRAPH '00: Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, Seiten 465–470, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- Emil Praun, Hugues Hoppe, Matthew Webb, und Adam Finkelstein. Real-Time Hatching. In Eugene Fiume, Hrsg., *SIGGRAPH 2001, Computer Graphics Proceedings*, Seiten 579–584, 2001.
- Christian Rössl, Leif Kobbelt, und Hans-Peter Seidel. Extraction of feature lines on triangulated surfaces using morphological operators. In *Smart Graphics, Proceedings of the 2000 AAAI Symposium*, 2000a.
- Christian Rössl, Leif Kobbelt, und Hans-Peter Seidel. Line Art Rendering of Triangulated Surfaces Using Discrete Lines of Curvature. In *Vision, Modeling, and Visualization (VMV) '99 proceedings*, Seiten 339 – 346, 2000b.
- Wolfgang Schoene. *Differentialgeometrie*. Teubner Verlagsgesellschaft, 1975.
- Heidrun Schumann und Wolfgang Müller. *Visualisierung: Grundlagen und allgemeine Methoden*. Springer Verlag Berlin, 2002.
- Mario Costa Sousa und Przemyslaw Prusinkiewicz. A few good lines: Suggestive drawing of 3d models. *Computer Graphics Forum*, 22(3), September 2003.
- Thomas Strothotte und Stefan Schlechtweg. *Non-Photorealistic Rendering*. Morgan Kaufmann Series, 2002.
- Prof. Dr. Karl Strubecker. *Differentialgeometrie III Theorie der Flächenkrümmung*. Walter de Gruyter & Co, 1969.
- Gabriel Taubin. Estimating the Tensor of Curvature of a Surface from a Polyhedral Approximation. In *ICCV '95: Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision*, Seite 902, Washington, DC, USA, 1995. IEEE Computer Society.

- William Welch und Andrew Witkin. Free-form shape design using triangulated surfaces. In *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, Seiten 247–256, New York, NY, USA, 1994. ACM Press.
- Josie Wernecke. *The Inventor Mentor: Programming Object-Oriented 3D Graphics with Open Inventor, Release 2*. Addison-Wesley, 1. Aufl., März 1994.
- Guoliang Xu. Convergent Discrete Laplace-Beltrami Operators over Triangular Surfaces. In *2004 Geometric Modeling and Processing (GMP 2004), Theory and Applications, 13-15 April 2004, Beijing, China*. IEEE Computer Society, 2004.
- Johannes Zander, Tobias Isenberg, Stefan Schlechtweg, und Thomas Strothotte. High Quality Hatching. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics)*, 23(3):421–430, September 2004.
- Ciyou Zhu, Richard H. Byrd, Peihuang Lu, und Jorge Nocedal. Algorithm 778: L-bfgs-b: Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization. *ACM Trans. Math. Softw.*, 23(4):550–560, 1997.